

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ZAVRŠNI RAD**

Deni Vlašić

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**

Mentor:

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli, dipl. ing.

Student:

Deni Vlašić

Zagreb, 2016.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomatske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomatske ispite studija brodogradnje



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Deni Vlašić**

Mat. br.: 0035190676

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **NUMERIČKA SIMULACIJA POKUSA SLOBODNE VOŽNJE MODELA BRODSKOG VIJKA**

Naslov rada na engleskom jeziku: **NUMERICAL SIMULATION OF THE OPEN WATER TEST FOR MARINE PROPELLER MODEL**

Opis zadatka:

Hidrodinamičke značajke brodskih vijaka se pouzdano mogu odrediti ispitivanjem modela brodskih vijaka. Najčešći i najjednostavniji pokus s modelom brodskog vijka je pokus s izoliranim vijkom, takozvani pokus slobodne vožnje vijka (engleski open water test). Pri ovom se pokusu nastoji da brodski vijak radi u približno neograničenoj tekućini, što znači da su granice tekućine dovoljno daleko od modela brodskog vijka. Pokusom slobodne vožnje vijka određuju se hidrodinamičke značajke vijka tj. poriv, moment i stupanj djelovanja vijka u homogenom polju brzina (neporemećenoj tekućini). Rezultati pokusa slobodne vožnje vijka koriste se kao osnova za projektiranje vijka za novi brod.

Razvojem računalne dinamike fluida moguće je odrediti hidrodinamičke karakteristike modela brodskog vijka što znatno skraćuje vrijeme i smanjuje troškove projektiranja brodskog vijka nove geometrije.

U završnom radu potrebno je, uz pomoć programskog paketa za računalnu dinamiku fluida, numerički simulirati pokus slobodne vožnje modela brodskog vijka.

U završnom radu treba:

1. Dati pregled literature vezane za numeričke simulacije pokusa slobodne vožnje modela brodskog vijka.
2. Dati matematičku osnovu numeričkih metoda za simulaciju pokusa slobodne vožnje modela brodskog vijka.
3. Pripremiti proračunsku mrežu, početne i rubne uvjete potrebne za numeričku simulaciju viskoznog strujanja.
4. Izvršiti numeričku simulaciju slobodne vožnje vijka koristeći programski paket OpenFOAM.
5. Pomoću dobivenih rezultata proračunati bezdimenzijske karakteristike modela brodskog vijka: koeficijent poriva, koeficijent momenta i koeficijent iskoristivosti vijka u slobodnoj vožnji.
6. Usporediti numerički dobivene bezdimenzijske karakteristike modela brodskog vijka s eksperimentalnim podacima dostupnim u literaturi.
7. Izvršiti analizu osjetljivosti rezultata s obzirom na gustoću proračunske mreže.

Rezultate proračuna prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama.

U radu treba navesti literaturu i eventualno dobivenu pomoć tijekom izrade.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

25. studenog 2015.

1. rok: 25. veljače 2016

1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.

2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.

2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.

3. rok: 17. rujna 2016.

3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

*Nastia Degiuli*

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli

*Nastia Degiuli*

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tokom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesorici Degiuli na potpori tokom izrade završnog rada od koje sam naučio iznimno puno, osobito na području brodske propulzije i teoretskih osnova dinamike fluida. Zahvaljujem se također prof. Jasaku te kolegama Innu Gatinu, Vuku Vukčevići i Gregoru Cvijetiću na nesebičnoj pomoći i na pruženom znanju iz područja računalne dinamike fluida.

# Sadržaj

<b>Popis simbola</b>	<b>III</b>
<b>Popis slika</b>	<b>VI</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>VII</b>
<b>SAŽETAK</b>	<b>VIII</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>IX</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Matematički model</b>	<b>3</b>
2.1 Osnovni fizikalni zakoni viskoznog nestlačivog strujanja fluida . . . . .	3
2.2 Rubni uvjeti Navier - Stokesovih jednadžbi . . . . .	4
2.3 Modeliranje turbulencije u računalnoj dinamici fluida . . . . .	5
2.3.1 Priroda turbulentnog strujanja . . . . .	5
2.3.2 Modeliranje turbulencije . . . . .	6
2.3.3 $k - \omega$ SST model turbulencije . . . . .	10
2.3.4 Logaritamski zakon brzine u turbulentnom graničnom sloju . . . . .	11
2.4 Metoda višestrukih referentnih koordinatnih sustava . . . . .	12
2.5 Diskretizacija Navier - Stokesovih jednadžbi . . . . .	13
2.6 Diskretizacija domene fluida . . . . .	17
<b>3 Pokus slobodne vožnje broskog vijka</b>	<b>18</b>
3.1 Zakon sličnosti kod proračuna broskog vijka . . . . .	18
<b>4 Postavke numeričke simulacije slobodne vožnje vijka</b>	<b>21</b>
4.1 Geometrija broskog vijka . . . . .	21
4.2 Kinematika broskog vijka . . . . .	22
4.3 Rubni uvjeti na granicama domene . . . . .	23
4.4 Rubni i početni uvjeti turbulentnih značajki . . . . .	23
<b>5 Numeričke simulacije slobodne vožnje broskog vijka</b>	<b>25</b>
5.1 Konvergencija integralnih veličina . . . . .	25
5.2 Polje tlaka oko krila vijka . . . . .	28
5.3 Usporedba rezultata numeričke simulacije . . . . .	31
5.4 Pogreške numeričke simulacije . . . . .	34

## **6 Zaključak**

**36**

## Popis simbola

$\bar{p}(x_i)$	vremenski osrednjeni tlak	Pa
$\bar{u}(x_i)$	vremenski osrednjena brzina	m/s
$\Delta t$	konačno mali vremenski odsječak	s
$\Delta_i$	ortogonalni dio površinskog vektora	m <sup>2</sup>
$\varepsilon$	brzina disipacije turbulentne kinetičke energije	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$\eta_o$	iskoristivost vijka u slobodnoj vožnji	-
$\kappa$	von Kármánova konstanta	-
$\mu$	dinamički koeficijent viskoznosti fluida	Pas
$\nu$	kinematički koeficijent viskoznosti fluida	m <sup>2</sup> /s
$\nu_T$	turbulentni kinematički koeficijent viskoznosti	m <sup>2</sup> /s
$\omega$	specifična brzina disipacije turbulentne kinetičke energije	1/s
$\Omega_i$	kutna brzina	rad/s
$\phi$	fizikalna veličina	-
$\rho$	gustoća fluida	kg/m <sup>3</sup>
$\tau_{ij}$	tenzor tangencijalnog naprezanja	Pa
$\tau_w$	smično naprezanje na stjenci	Pa
$C_L$	mjerilo geometrijske sličnosti	-
$D_M$	promjer modela vijka	m
$D_S$	promjer prototipa vijka	m
$F$	protok polja brzine kroz stranice kontrolnog volumena	m <sup>3</sup> /s
$f_x$	koeficijent linearne interpolacije	-
$Fn_M$	Froudeov broj za model	-
$Fn_S$	Froudeov broj za prototip	-

$H$	operator u diskretiziranoj Navier - Stokesovoj jednadžbi	-
$J$	koeficijent napredovanja vijka	-
$k$	specifična kinetička energija turbulencije	$\text{m}^2/\text{s}^2$
$k_i$	neortogonalni dio površinskog vektora	$\text{m}^2$
$l_{0,7R}$	duljina profila krila vijka na $0,7R$	$\text{m}$
$n_i$	vektor normale	-
$n_M$	broj okretaja modela vijka	$1/\text{s}$
$n_S$	broj okretaja prototipa vijka	$1/\text{s}$
$P$	tlak	$\text{Pa}$
$p'(x_i, t)$	fluktuirajuća komponenta tlaka	$\text{Pa}$
$Q$	moment na vijku	$\text{Nm}$
$R$	polumjer broskog vijka	$\text{m}$
$Rn_M$	Reynoldsov broj za model	-
$Rn_S$	Reynoldsov broj za prototip	-
$S_i^f$	površinski vektor u smjeru vanjske normale	$\text{m}^2$
$S_P$	površina vanjskih stranica kontrolnog volumena	$\text{m}^2$
$T$	vremenski period	$\text{s}$
$T_P$	sila poriva vijka	$\text{N}$
$u'(x_i, t)$	fluktuirajuća komponenta brzine	$\text{m/s}$
$u^+$	bezdimenzijska brzina	-
$u_\tau$	brzina trenja	$\text{m/s}$
$U_{AM}$	brzina napredovanja modela vijka	$\text{m/s}$
$U_{AS}$	brzina napredovanja prototipa vijka	$\text{m/s}$
$U_{IQ}$	relativna odstupanje vrijednosti momenta	$\%$



$U_{IT}$	relativno odstupanje vrijednosti sile poriva	%
$u_i$	vektor brzine strujanja fluida	m/s
$u_i^f$	brzina u težištu stranice kontrolnog volumena	m/s
$u_i^N$	brzina u težištu susjednog kontrolnog volumena	m/s
$u_i^P$	brzina u težištu kontrolnog volumena u kojem se vrši proračun	m/s
$V_P$	kontrolni volumen	m <sup>3</sup>
$x_i$	radij vektor	m
$y$	okomita udaljenost proizvoljne točke u turbulentnom graničnom sloju od stjenke	m
$y^+$	bezdimenzijska okomita udaljenost proizvoljne točke u turbulentnom graničnom sloju od stjenke	-

## Popis slika

Slika 1	Diskretizirana domena tekućine . . . . .	17
Slika 2	Dijagram slobodne vožnje vijka . . . . .	20
Slika 3	Diskretizacija površine broskog vijka . . . . .	22
Slika 4	Promjena početnog uvjeta specifične kinetičke energije turbulencije $k$ i brzine disipacije kinetičke energije $\omega$ u ovisnosti o koeficijentu napredovanja $J$ . . . . .	24
Slika 5	Konvergencija sile poriva za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	26
Slika 6	Konvergencija sile poriva u zadnjih 200 iteracija za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	26
Slika 7	Konvergencija momenta na vijku za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	27
Slika 8	Konvergencija momenta na vijku u zadnjih 200 iteracija za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	27
Slika 9	Polje tlaka oko profila krila vijka na $r/R = 0,3$ za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	28
Slika 10	Polje tlaka oko profila krila vijka na $r/R = 0,5$ za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	29
Slika 11	Polje tlaka oko profila krila vijka na $r/R = 0,7$ za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	29
Slika 12	Polje tlaka oko profila krila vijka na $r/R = 0,9$ za koeficijent napredovanja $J = 0,65$ . . . . .	30
Slika 13	Vrijednost tlaka na podtlačnoj strani vijka (naličje) . . . . .	30
Slika 14	Dijagram slobodne vožnje vijka dobiven numeričkim simulacijama i eksperimentom . . . . .	33
Slika 15	Relativna pogreška za koeficijent poriva, koeficijent momenta i stupanj djelovanja vijka . . . . .	34

## Popis tablica

Tablica 1	Kinematičke značajke vijak . . . . .	22
Tablica 2	Dimenzije proračunske domene fluida . . . . .	23
Tablica 3	Relativna greška koeficijenta poriva i koeficijenta momenta . . . . .	32
Tablica 4	Relativna pogreška stupnja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji . . . . .	33
Tablica 5	Vrijednost bezdimenzijske udaljenosti od stjenke $y^+$ za različite koefi- jente napredovanja $J$ . . . . .	35

## SAŽETAK

Određivanje hidrodinamičkih značajki brodskog vijka u slobodnoj vožnji je vrlo važno provesti u ranoj fazi osnivanja broda. Hidrodinamičke značajke brodskih vijaka pouzdano se mogu odrediti ispitivanjem modela brodskih vijaka. Rezultati pokusa slobodne vožnje vijka koriste se kao osnova za projektiranje vijka za novi brod. Razvoj računalne dinamike fluida omogućio je numeričko određivanje hidrodinamičkih značajki modela brodskog vijka, što znatno skraćuje vrijeme i smanjuje troškove projektiranja brodskog vijka nove geometrije.

U ovom radu su provedene numeričke simulacije slobodne vožnje brodskog vijka u svrhu ispitivanja mogućnosti primjene računalne dinamike fluida (RDF) pri projektiranju brodskog vijka. U radu je korišten programski paket otvorenog koda OpenFOAM. To je programski paket koji se zasniva na modelu viskoznog strujanja tekućine opisanog Reynoldsovim osrednjenim Navier - Stokesovim jednadžbama. Validacija programskog paketa OpenFOAM je provedena usporedbom rezultata dobivenih numeričkim simulacijama s eksperimentalnim podacima dostupnim u literaturi. Pri provođenju numeričkih simulacija primijenjena je metoda višestrukih referentnih koordinatnih sustava (eng. *Moving Reference Frame method* - MRF). MRF metoda rješava jednadžbe strujanja u rotirajućem koordinatnom sustavu brodskog vijka što omogućuje rješavanje ovog problema kao stacionarnog.

Iz rezultata dobivenih numeričkim simulacijama može se zaključiti da se računalna dinamika fluida može uspješno primijeniti za simulaciju pokusa slobodne vožnje brodskog vijka te dobivanje sile poriva, momenta vijka i stupanja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji.

Ključne riječi: brodski vijak, pokus slobodne vožnje, računalna dinamika fluida

## SUMMARY

Determination of open water hydrodynamic characteristics of a marine propeller is very important in the early stage of ship design. Hydrodynamic characteristics of marine propellers can be reliably determined by testing propeller models. Results of open water tests are used as the basis for the design of the propeller for a new ship. The development of computational fluid dynamics enabled the numerical determination of the hydrodynamic characteristics of the marine propeller model, which significantly shortens the time and reduces the cost of designing the new marine propeller geometry.

In this study, numerical simulations of open water test are carried out with the purpose of examining the possibility of applying the computational fluid dynamics for the design of the marine propeller. In this paper, the open source software package OpenFOAM is used. This is a software package that is based on the viscous fluid flow model described with Reynolds averaged Navier-Stokes equations. Validation of the software package OpenFOAM is carried out by comparing the results obtained by numerical simulations with experimental data available in the literature. Moving Reference Frame (MRF) method is used in numerical simulations. MRF method solves the flow equations in a rotating coordinate system of the propeller which allows solving this problem as stationary one.

From the results obtained by numerical simulations it can be concluded that the computational fluid dynamics can be successfully applied to simulate open water test of a marine and to obtain the thrust, torque and open water efficiency.

Keywords: marine propeller, open water test, computational fluid dynamics

# 1 Uvod

Projektiranje brodskog propulzora još je od vremena modernizacije brodograđevne struke (patentiranja parnog stroja) vrlo zahtjevna disciplina za brodograđevne inženjere. 19. stoljeće je ostalo obilježeno parnim stapnim strojem i brodskim kolom kao propulzorom kojeg kasnije istiskuje iz uporabe brodski vijak - propeler. Prva se praktična primjena brodskog vijka pripisuje Amerikancu C. Stevensu koji je 1804. godine ispitivao brodicu duljine 7,5 m [1]. J. Ressel proveo je 1828. god. ispitivanje brodskog vijka u Trstu na brodu duljine 18 m [1]. Probna vožnja je trajala oko 10 minuta nakon čega je eksplodirala cijev za paru. Vijak koji se koristio imao je oblik Arhimedova puža kao i niz kasnije patentiranih vijaka. Vijak kojeg je patentirao F. P. Smith pokazao se najnačajnijim za razvoj modernog brodskog vijka. Na pokusnoj plovidbi koju je proveo F. P. Smith s vijkom oblika dugačke spirale odlomio se dio spirale s vijka, nakon čega je brod išao brže, te je F. P. Smith projektirao vijak s kraćom spiralom koji je bio nalik današnjim vijcima. Oko 1845. godine vijak je već imao oblik vrlo blizu današnjem. Prvi brod s vijkom Great Britain prelazi Atlantik 1854. godine te započinje eru korištenja vijka kao propulzijskog uređaja [1].

Danas se brodski vijak projektira na osnovu eksperimenta slobodne vožnje vijka i pokusa vlastitog pogona. Eksperimenti se provode na modelima višestruko umanjenih dimenzija iz razloga što je većina brodova prevelikih dimenzija za ispitivanje u naravi. Brodovi se najčešće rade kao unikatni ili kao serija od nekoliko sličnih brodova, te bi bilo neisplativo izvođenje pokusa na prototipu broda. Osim toga, za provođenje pokusa na moru potrebni su laboratorijski uvjeti (mirna površina mora, bez prisutnosti vjetera) koje je nemoguće postići tj. nisu upravljivi od strane čovjeka, već ovise o vremenskim uvjetima. Iz navedenih razloga pribjegava se projektiranju vijka pomoću eksperimentalnih podataka prikupljenih ispitivanjem modela višestruko manjih dimenzija u bazenima gdje se mogu postići laboratorijski uvjeti. Međutim, zbog nemogućnosti potpunog zadovoljenja hidrodinamičke sličnosti, preslikavanje rezultata pokusa pomoću dimenzijske analize s modela na prototip ne daje u potpunosti točna predviđanja veličina sila, momenata te gibanja prototipa.

Računalna dinamika fluida (RDF) predstavlja alternativu skupim eksperimentalnim ispitivanjima te omogućuje brzo i povoljno ispitivanje radnih karakteristika velikog broja vijaka. Zbog toga će se u ovom radu ispitati mogućnosti RDF-a pri proračunu osnovnih karakteristika brodskog vijka. Ispitivanje će se provesti na modelu brodskog vijka za koji su dostupni eksperimentalni podatci slobodne vožnje brodskog vijka.

Posljednjih godina je sve veći napredak u mogućnostima računala, i RDF metode koje koriste Reynoldsove osrednjene Navier - Stokesove (RANS) jednadžbe se sve više primjenjuju na različite geometrije brodskih vijaka. Dosadašnja ispitivanja su pokazala veliki pomak u modeliranju turbulencije no neki problemi vezani za turbulenciju i kavitaciju trebaju daljnja ispitivanja i razvoj računalnih kodova.

Trejo et al [2] je proveo ispitivanje trokrilnog propelera DTMB 4119 simulacijom slobodne vožnje brodskog vijka u programskom paketu Ansys CFX koji rješava RANS jednačbe za turbulentno strujanje i koristi  $k - \varepsilon$  model turbulencije. Subhas et al [3] je proveo simulaciju slobodne vožnje brodskog vijka pomoću RANS modela za predviđanje polja brzine i tlaka oko brodskog vijka i pojave kavitacije, te simulira utjecaj kavitacije na dinamičke karakteristike vijka. Simulacije su provedene u programskom paketu Fluent 6.3. Prakash et al [4] su u programskom paketu Fluent, koji se temelji na RANS jednačbama, izvršili numeričke simulacije slobodne vožnje za brodski vijak iz serije Wageningen B4-55. Klasson et al [5] su izvršili simulaciju slobodne vožnje brodskog vijka u programskom paketu OpenFOAM te su koristili metodu višestrukih referentnih koordinatnih sustava i  $k - \omega$  SST model turbulencije. Rhee et al [6] su proračunali strujanja tekućine oko brodskog vijka P5168 koristeći nestrukturiranu mrežu. Kulczyk et al [7] su analizirali strujanje tekućine oko brodskog vijka koristeći RANS jednačbe uz primjenu  $k - \varepsilon$  i  $k - \omega$  model turbulencije. Mosaad et al [8] su primjenili RANS jednačbe na strujanje tekućine oko brodskog vijka u programskom paketu Fluent, te su validirali  $k - \varepsilon$  i  $k - \omega$  modele turbulencije. U ovom radu je napravljena simulacija slobodne vožnje u programskom paketu OpenFOAM metodom višestrukih referentnih koordinatnih sustava i korištenjem  $k - \omega$  SST modela turbulencije na modelu brodskog vijka koji je napravljen i ispitan za potrebe T2015 Workshop-a i za njega su dostupni podaci iz [9].

## 2 Matematički model

U ovom poglavlju dani su osnovni fizikalni zakoni koji opisuju viskozno strujanje fluida, pojednostavljena koja će se koristiti, opisivanje metode konačnih volumena i način diskretizacije domene fluida u kojoj se model brodskog vijka nalazi. Matematički izrazi u ovom poglavlju pisani su u indeksnoj notaciji [10].

### 2.1 Osnovni fizikalni zakoni viskoznog nestlačivog strujanja fluida

Jednadžbe kojima se opisuju viskozno nestlačivo strujanje newtonovskog [11] fluida su:

- Zakon očuvanja mase u diferencijalnom obliku:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

gdje je  $u_i$  vektorsko polje brzine, a  $x_i$  je radij vektor.

- Zakon očuvanja količine gibanja u diferencijalnom obliku (Navier-Stokesove jednadžbe):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2)$$

pri čemu su uvedene supstitucije:

$$p = \frac{P}{\rho}, \quad (3)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (4)$$

gdje je  $g$  ubrzanje zemljine sile teže,  $P$  je tlak,  $p$  je tlak podjeljen s gustoćom fluida,  $\rho$  je gustoća fluida,  $\nu$  je kinematički koeficijent viskoznosti te je  $\mu$  dinamički koeficijent viskoznosti.

Navedene diferencijalne jednadžbe su parcijalne diferencijalne jednadžbe, pri čemu je jednadžba (1) eliptičnog tipa dok je jednadžba (2) parabolitnog tipa.

Članovi u jednadžbi (2) redom s lijeva na desno se nazivaju:

- nestacionarni član promjene brzine u vremenu,
- konvekcijski član koji opisuje utjecaj povezan s promjenom brzine u prostoru,
- difrakcijski član koji je rezultat pretpostavke newtonovskog fluida (tenzor naprezanja je linearno proporcionalan tenzoru brzine deformacije),



- član masene sile (u ovom slučaju gravitacijsko ubrzanje),
- član gradijenta tlaka.

Difuzijski član predstavlja devijatorski dio tenzora naprezanja dok član s gradijentom tlaka predstavlja sferni dio tenzora naprezanja koji je invarijantan na rotaciju koordinatnog sustava [10].

Jednadžba kontinuiteta (1) i zakon očuvanja količine gibanja (2) definirani za viskozno nestlačivo strujanje fluida tvore sistem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (eng. *Partial Differential Equations* - PDE) kojim su opisana proizvoljna strujanja newtonskih fluida. Raznolikost strujanja koju se ovim sistemom jednadžbi može opisati proizlazi iz raznolikosti narinutih rubnih uvjeta. Da bi pojedino strujanje bilo u potpunosti definirano potrebno je definirati rubne uvjete koji se sastoje od dinamičkih i kinematičkih rubnih uvjeta [11].

## 2.2 Rubni uvjeti Navier - Stokesovih jednadžbi

Sistem jednadžbi (1) i (2) će rezultirati jednoznačnim rješenjem samo ako su zadani rubni i početni uvjeti. Broj i tip rubnih i početnih uvjeta je definiran samim diferencijalnim jednadžbama, tj. tipom diferencijalnih jednadžbi. Postoje tri tipa rubnih uvjeta iz kojih se mogu izvesti mnogobrojni rubni uvjeti [12]:

- Dirchletov rubni uvjet - propisuje vrijednost varijable na granici domene:

$$\phi = f(x, y, z), \quad (5)$$

gdje je  $\phi$  varijabla, a  $f$  je funkcija prostornih koordinata.

- Von Neumanov rubni uvjet - propisuje vrijednost gradijenta na granici fluida:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_i} = f(x, y, z), \quad (6)$$

gdje je  $n_i$  vektor normale.

- Miješani rubni uvjet - propisuje kombinaciju vrijednosti varijable i gradijenta na granici fluida:

$$a\phi + b\frac{\partial \phi}{\partial n} = f(x, y, z), \quad (7)$$

gdje su  $a$  i  $b$  proizvoljne konstante.

Fizikalni rubni uvjeti koji se često mogu primijetiti u problemima strujanja su [12]:

- Kruta stijenka - granica u domeni strujanja fluida su vrlo često krute stijenke, pomične ili nepomične. Brzina strujanja fluida na krutoj stijenci je jednaka brzini krute stijenke.

- Ulaz fluida u domenu - na ulazu fluida u domenu u kojoj se provodi proračun može biti poznat tlak ili brzina. Prilikom korištenja modela turbulencije fluid može imati neka svojstva režima strujanja kao što je intezitet turbulencije koji također treba biti poznat, o čemu će više biti riječi kasnije.
- Rubni uvjet simetrije - ukoliko se smatra da je strujanje simetrično obzirom na neku ravninu, rubni uvjet se dobije kao nulti gradijent vektorskih polja u smjeru normale na ravninu, te kao nulti gradijent skalarnih polja.
- Izlaz fluida iz domene - na izlazu se obično zadaje fiksna vrijednost dinamičkog tlaka dok se za polje brzine zadaje nulti gradijent.

## 2.3 Modeliranje turbulencije u računalnoj dinamici fluida

U ovom poglavlju će se ukratko opisati priroda turbulentnog strujanja, razlozi modeliranja turbulentnog strujanja, prikaz Reynoldsovih osrednjenih Navier - Stokesovih jednažbi, te  $k - \omega$  SST model turbulencije koji se koristi u ovom radu.

### 2.3.1 Priroda turbulentnog strujanja

Laminarno strujanje u prirodi je vrlo nestabilno, te uslijed malog poremećaja strujanje prelazi u turbulentno strujanje. Za stacionarne rubne uvjete teorijski uvijek postoji stacionarno rješenje Navier - Stokesovih jednažbi, koje se zbog matematičkih poteškoća često ne može odrediti. U prirodi su moguća samo ona stacionarna strujanja koja su neosjetljiva na male poremećaje. Ukoliko poremećaj slabi u vremenu strujanje je stabilno i ostaje stacionarno te se takvo strujanje naziva laminarnim. Međutim, ako poremećaj raste u vremenu strujanje postaje nestacionarno bez obzira na stacionarne rubne uvjete te dobiva kaotičan karakter, tj. postaje turbulentno strujanje.

Turbulentno strujanje je strujanje u kojem razne veličine pokazuju slučajne promjene u vremenu i prostoru, pri čemu postoje srednje vrijednosti promatranih veličina. Intenzivno miješanje čestica fluida daje turbulentnom strujanju difuzni karakter s posljedicom veće disipacije energije [11].

Obzirom da su Navier - Stokesove jednažbe općenite, mogu opisati sva moguća strujanja fluida pa tako i turbulentna strujanja, no zbog velikog raspona prostornih i vremenskih dimenzija vrtloga direktan numerički proračun u kojem bi se razlučile sve dimenzije vrtloga vrlo je skup. Karakteristike turbulentnog strujanja su [13]:

- slučajnost (ukazuje na nered i neponovljivost),
- vrtloženje,

- nelinearnost,
- trodimenzionalnost,
- kontinuitet strukture vrtloga (tj. kontinuirani spektar energije vrtloga),
- prijelaz energije s većih na manje redove veličina,
- nepovratnost procesa,
- povećana disipacija energije,
- isprekidanost (turbulencije se događaju samo u dijelovima domene),
- visoka difuzija (odnosi se na energiju),
- samoočuvanje i sličnost (u jednostavnim strujanjima struktura turbulencije najviše ovisi o lokalnim svojstvima strujanja).

### 2.3.2 Modeliranje turbulencije

Modeliranje turbulencije je potrebno da bi mogli približno uzeti u obzir utjecaj turbulencije pri korištenju grube prostorne diskretizacije. Reynoldsove osrednjene Navier - Stokesove jednačbe služe da bi se opisalo nestacionarno turbulentno strujanje kao zbroj osrednjenih vrijednosti i fluktuacije uslijed turbulencije [13].

Polje brzina i tlakova može se napisati kao zbroj vremenski osrednjih i fluktuirajućih veličina:

- polje tlaka

$$p(x_i, t) = \bar{p}(x_i) + p'(x_i, t), \quad (8)$$

- polje brzina

$$u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i) + u'_i(x_i, t), \quad (9)$$

gdje je  $\bar{p}(x_i)$  osrednjeni tlak,  $p'(x_i, t)$  je fluktuirajuća komponenta tlaka,  $\bar{u}_i(x_i)$  je osrednjena brzina,  $u'_i(x_i, t)$  je fluktuirajuća komponenta brzine.

Općenito, ako je  $\phi$  neka fizikalna veličina u turbulentnom strujanju, može se prikazati kao zbroj osrednjenog  $\bar{\phi}$  i pulsirajućeg dijela  $\phi'$  [11].

Po definiciji:

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(x_i, t - \tau) d\tau, \quad (10)$$

gdje je  $T$  period osrednjenja, a  $\tau$  je varijabla vremena osrednjavanja. U kavzistacionarnom strujanju vrijedi:

$$\bar{\phi}(x_i) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(x_i, t) dt. \quad (11)$$

Period osrednjavanja mora biti takav da se već jednom osrednjena veličina ponovnim osrednjavanjem ne mijenja:

$$\bar{\bar{\phi}}(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i, t). \quad (12)$$

Iz prethodno navedene definicije slijedi:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad (13)$$

$$\phi' = \phi - \bar{\phi}, \quad (14)$$

$$\bar{\phi}' = \overline{\phi - \bar{\phi}} = \bar{\phi} - \bar{\bar{\phi}} = 0. \quad (15)$$

Definiramo li  $\zeta$  kao još jednu fluktuirajuću veličinu u turbulentnom strujanju lako se pokazuje da kod dovoljno spore promjene vrijedi:

$$\bar{\bar{\phi}} \bar{\zeta}' = \bar{\phi} \bar{\zeta}' = 0, \quad (16)$$

$$\bar{\bar{\phi}} \bar{\zeta} = \overline{\bar{\phi}(\bar{\zeta} + \zeta')} = \bar{\bar{\phi}} \bar{\zeta} + \bar{\bar{\phi}} \bar{\zeta}' = \bar{\bar{\phi}} \bar{\zeta} + 0, \quad (17)$$

$$\bar{\bar{\phi}} \bar{\zeta} = \bar{\phi} \bar{\zeta}. \quad (18)$$

Jednadžba (18) je postulat i treba ga zadovoljiti [11]. Budući da su deriviranje po koordinatama i integriranje po vremenu dvije međusobno nezavisne operacije, vrijedi:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \phi(x_i, t - \tau)}{\partial x_i} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(x_i, t - \tau) d\tau \right) = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}, \quad (19)$$

dakle:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}. \quad (20)$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\partial \phi(x_i, t - \tau)}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi(x_i, t - \tau) d\tau \right) = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}, \quad (21)$$

dakle:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}. \quad (22)$$

Pretpostavimo li da su varijable  $\phi$  i  $\zeta$  fluktuirajuće veličine u kvazistacionarnom turbulentnom strujanju pri čemu je  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$  i  $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$ , tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \overline{\phi \zeta} &= \overline{(\bar{\phi} + \phi')(\bar{\zeta} + \zeta')} = \overline{\bar{\phi} \bar{\zeta}} + \overline{\bar{\phi} \zeta'} + \overline{\phi' \bar{\zeta}} + \overline{\phi' \zeta'} = \bar{\phi} \bar{\zeta} + 0 + 0 + \overline{\phi' \zeta'}, \\ \overline{\phi \zeta} &= \bar{\phi} \bar{\zeta} + \overline{\phi' \zeta'}. \end{aligned} \quad (23)$$

Jednadžbom (23) može se napisati dvostruka korelacija brzine:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}. \quad (24)$$

Kontrakcijom indeksa u jednadžbi (24) i dijeljenjem s 2 dobije se:

$$\overline{\frac{1}{2} u_i^2} = \frac{1}{2} \bar{u}_i^2 + \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}. \quad (25)$$

Članovi u jednadžbi (25) su redom slijeva na desno:

- osrednjena vrijednost ukupne kinetičke energije strujanja,
- specifična kinetička energija glavnog osrednjenog strujanja,
- osrednjena vrijednost kinetičke energije fluktuirajućeg strujanja ili kinetička energija turbulencije ( $\bar{k} = \frac{\overline{u_i'^2}}{2}$ ).

Lako se pokaže da su  $|u'_1|$ ,  $|u'_2|$  i  $|u'_3|$  istog reda veličine pa vrijedi:

$$|u'_1| \approx |u'_2| \approx |u'_3|. \quad (26)$$

Stoga izraz za kinetičku energiju turbulencije poprima oblik:

$$k = \frac{3}{2} \overline{u'^2}. \quad (27)$$

Kada se jednadžba kontinuiteta (1) raščlani na vremenski osrednjeni i fluktuirajući dio dobije se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (28)$$

Vremenskim osrednjavanjem jednadžbe (28) slijedi:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + 0 = 0. \quad (29)$$

Uvrštavajući jednadžbu (29) u jednadžbu (28) slijedi:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (30)$$

Iz posljednjeg izraza se vidi da i fluktuirajuća komponenta brzine zadovoljava jednadžbu kontinuiteta (1).

Navier - Stokesove jednadžbe za nestalčivi fluid ( $\rho = \text{const.}$ ) i uz zanemarenje masenih sila ( $f_i = 0$ ) glasi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho (\bar{u}_i + u'_i) (\bar{u}_j + u'_j)] = & - \frac{\partial (\bar{P} + P')}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Vremenskim osrednjavanjem jednadžbe količine gibanja (31) dobije se osrednjena jednadžba količine gibanja koja glasi:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right]. \quad (32)$$

Vremenski osrednjene jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe količine gibanja nazivaju se Reynoldsovim jednadžbama. Dodatni član  $\rho \overline{u'_i u'_j}$  u jednadžbi (32) naziva se turbulentnim ili Reynoldsovim naprežanjem, te predstavlja nelinearnu posljedicu konvekcije inercijskih sila u fluidu. To je turbulentna difuzija količine gibanja. Reynoldsovo naprežanje je simetričan tenzor sa šest nepoznanica:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'_1 u'_1} & -\rho \overline{u'_1 u'_2} & -\rho \overline{u'_1 u'_3} \\ -\rho \overline{u'_2 u'_1} & -\rho \overline{u'_2 u'_2} & -\rho \overline{u'_2 u'_3} \\ -\rho \overline{u'_3 u'_1} & -\rho \overline{u'_3 u'_2} & -\rho \overline{u'_3 u'_3} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Očito je da Reynoldsove jednadžbe imaju više nepoznanica nego jednadžbi pa takav sustav nema jednoznačno rješenje. Stohastička priroda turbulentnog strujanja prikazana je vremenski osrednjenim veličinama te se zbog toga izgubio jedan dio informacija koje nose Navier - Stokesove jednadžbe. Da bi se vratile te informacije potrebno je poznavati beskonačno korelacija polja tlaka i polja brzina. Međutim, inženjerska praksa je pokazala da nije potrebno poznavati beskonačno korelacija, već je dovoljan konačan broj za rješavanje inženjerskih problema te se na toj činjenici temelje modeli turbulencije [11].

### 2.3.3 $k - \omega$ SST model turbulencije

Model turbulencije koji će se koristiti u ovom rad je  $k - \omega$  SST model koji kombinira dva najzastupljenija modela turbulencije, tj.  $k - \varepsilon$  i  $k - \omega$  model turbulencije. Razlog kombiniranja dva modela turbulencije je što je  $k - \varepsilon$  model turbulencije neosjetljiv na ulazne parametre i dobro opisuje turbulenciju daleko od stijenke. Međutim, u praksi se pokazao jako osjetljiv na strme gradijente tlaka te loše predviđa smično naprezanje na krutim stijenkama što dovodi do odgode ili izostanka odvajanja strujanja od stijenke. Drugi spomenuti model turbulencije,  $k - \omega$ , je jako osjetljiv na ulazne parametre, ali je neosjetljiv na strme gradijente tlaka i jako dobro predviđa tangencijalno naprezanje na stijenci. Zbog navedenih razloga ova dva modela turbulencije su se spojila u jedan kako bi se iskoristile prednosti i eliminirali nedostaci tih modela [14]. Da bi zatvorili sustav Reynoldsovih jednadžbi potrebno je definirati dodatne jednadžbe za turbulentno strujanje. Model turbulencije  $k - \omega$  SST (eng. *Shear Stress Transport turbulence model*) uz stjenku koristi  $k - \omega$  model turbulencije, a dalje od stijenke koristi  $k - \varepsilon$  model turbulencije koji imaju istu formulaciju tj.  $\varepsilon$  se lako dovede u vezu s  $\omega$  te se za promjenu konstanti s onih koje koristi  $k - \omega$  model u konstante koje koristi  $k - \varepsilon$  model u transportnim jednadžbama, koriste funkcije miješanja. Transportne jednadžbe za specifičnu kinetičku energiju turbulencije  $k$  i za specifičnu brzinu disipacije energije  $\omega$  su [14]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (34)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 + F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \quad (35)$$

gdje su koeficijenti za zatvaranje sustava [14]:

$$P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 10 \beta^* k \omega \right), \quad (36)$$

$$F_1 = \tanh \left[ \left[ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right]^4 \right], \quad (37)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right), \quad (38)$$

$$S = \sqrt{2 W_{ij} W_{ij}} \quad (39)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (40)$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_2 = 0,44, \quad (41)$$

$$\beta_1 = \frac{3}{40}, \beta_2 = 0,0828, \quad (42)$$

$$\beta^* = \frac{9}{100}, \quad (43)$$

$$\sigma_{k1} = 0,85, \sigma_{k2} = 1, \quad (44)$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0,5, \sigma_{\omega 2} = 0,856. \quad (45)$$

Veza između  $\varepsilon$  i  $\omega$  je:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon}{l}} C_\mu^{-\frac{3}{8}}, \quad (46)$$

gdje je  $C_\mu$  konstanta modela turbulencije koja iznosi 0,09,  $\omega$  je specifična brzina disipacije kinetičke energije turbulencije,  $\varepsilon$  je brzina disipacije energije turbulencije,  $l$  je karakteristična duljinska skala. Funkcija miješanja koja se koristi za konstante u transportnim jednažbama za  $k$  i  $\omega$  je:

$$C = F_1 C_1 + (1 - F_1) C_2, \quad (47)$$

gdje je  $C$  opća konstanta,  $C_1$  je opća konstanta koja se koristi u  $k - \omega$  modela turbulencije, a  $C_2$  je opća konstanta koja se koristi u  $k - \varepsilon$  modelu turbulencije. Izraz za turbulentnu viskoznost glasi:

$$\nu_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)}. \quad (48)$$

gdje je  $F_2$  funkcija miješanja.

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right], \quad (49)$$

### 2.3.4 Logaritamski zakon brzine u turbulentnom graničnom sloju

Logaritamski zakon brzine u turbulentnom graničnom sloju daje osrednjenu brzinu fluida u graničnom sloju ovisno o udaljenosti točke koju promatramo od stijenke uz koju struji fluid. Logaritamski zakon je definiran pomoću izraza:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+, \quad (50)$$

uz:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad (51)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (52)$$



$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad (53)$$

gdje je  $y$  okomita udaljenost proizvoljne točke unutar turbulentnog graničnog sloja od stijenke,  $y^+$  je bezdimenzijska udaljenost te iste točke od stijenke,  $u^+$  je bezdimenzijska brzina,  $\tau_w$  je smično naprezanje na stijenci,  $u_\tau$  je brzina trenja,  $\kappa$  je von Kármánova konstanta, dok je  $C^+$  konstanta dobivena eksperimentom.

Eksperimentalno je dobiveno da von Kármánova konstanta iznosi  $\kappa = 0,41$ , te konstanta  $C^+ = 5,0$  za glatku površinu. Za vrijednosti  $y^+ < 5$  tj. u laminarnom podsloju vrijedi zakon ovisnosti brzine o udaljenosti od stijenke:

$$u^+ = y^+. \quad (54)$$

Za vrijednosti  $y^+ > 30$  vrijedi jednadžba (50). Za prijelazni sloj gdje je  $5 < y^+ < 30$  profil brzina nije dobro opisan ni jednadžbom (54) niti jednadžbom (50). Navedene jednadžbe se koriste za definiranje profila brzine u modelima turbulencije.

## 2.4 Metoda višestrukih referentnih koordinatnih sustava

Metoda višestrukih referentnih koordinatnih sustava (eng. *Multiple Reference Frame method-MRF method*) je metoda u programskom paketu OpenFOAM koja se koristi za rješavanje stacionarnog viskoznog turbulentnog strujanja opisanog Reynoldsovim osrednjenim Navier - Stokesovim jednadžbama. Metoda se koristi za rješavanje problema u domenama fluida u kojima se nalaze pomična kruta tijela koja se složeno gibaju u fluidu (npr. rotacija + translacija). Metoda radi na principu da se u domeni koja je definirana kao rotirajuća, računa protok u svakoj ćeliji koristeći jednadžbe postavljene za rotirajući koordinatni sustav u odnosu na inercijski koordinatni sustav. Jednadžbe koje opisuju strujanje u rotirajućem koordinatnom sustavu u odnosu na inercijski su kako slijedi [15]:

- ubrzanje:

$$u_i^I = u_i^R + \Omega_i r_j, \quad (55)$$

$$\left[ \frac{du_i^I}{dt} \right]_I = \left[ \frac{du_i^I}{dt} \right]_R + \Omega_i u_j^I, \quad (56)$$

$$\left[ \frac{du_i^I}{dt} \right]_I = \left[ \frac{du_i^R}{dt} \right]_R + \frac{d\Omega_i}{dt} r_j + 2\Omega_i u_j^R + \Omega_i \Omega_j r_k, \quad (57)$$

gdje je  $r_i$  radij vektor,  $\Omega$  je kutna brzina, nadindeks  $I$  označava inercijski koordinatni sustav, a nadindeks  $R$  označava relativni (rotirajući) koordinatni sustav.

- Navier - Stokesove jednačbe za nestlačivi fluid u inercijskom koordinatnom sustavu:

$$\frac{\partial u_i^I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i^I u_j^I) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^I}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial u_i^I}{\partial x_i} = 0. \quad (59)$$

- Navier - Stokesove jednačbe za nestlačivi fluid u relativnom koordinatnom sustavu:

$$\frac{\partial u_i^R}{\partial t} + \frac{d\Omega_i}{dt} r_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i^R u_j^R) + 2\Omega_i u_j^R + \Omega_i \Omega_j r_k = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^R}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial u_i^R}{\partial x_i} = 0. \quad (61)$$

- Navier - Stokesove jednačbe za nestlačivi fluid u relativnom koordinatnom sustavu s apsolutnom brzinom:

$$\frac{\partial u_i^R}{\partial t} + \frac{d\Omega_i}{dt} r_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i^R u_j^I) + \Omega_i u_j^I = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^I}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial u_i^I}{\partial x_i} = 0. \quad (63)$$

Za korištenje MRF rješavača postoje slijedeća ograničenja [16]:

- granica razdvajanja pokretnih zona i stacionarnih zona mora biti tako orijentirana da je komponenta brzine rotirajućeg koordinatnog sustava jednaka nuli u smjeru okomitom na graničnu površinu među zonama,
- strogo govoreći MRF metoda se smije koristiti samo kod stacionarnih strujanja,
- brzina rotiranja i brzina translacije se pretpostavljaju stacionarnima.

## 2.5 Diskretizacija Navier - Stokesovih jednačbi

Diskretizacija jednačbi temelji se na integriranju Navier - Stokesovih jednačbi po kontrolnom volumenu te primjenom teorema Gauss-Ostrogradski u divergentnom obliku. Primjena teorema Gauss-Ostrogradski preslikava se proračun s težišta kontrolnih volumena na njihove stranice. Vrijednosti fizikalnih veličina na granicama između kontrolnih volumena se interpoliraju nekom od odabranih diferencijskih shema. Diskretizacija jednačbe kontinuiteta za nestlačivo strujanje (1)

primjenom teorema Gauss-Ostrogradski poprima oblik:

$$\int_{V_P} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \oint_{S_P} u_i n_i dS = \sum_f S_i^f u_i^f = \sum_f F = 0, \quad (64)$$

gdje je  $S_i^f$  usmjerena površina stranice kontrolnog volumena,  $F$  je protok, dok je  $u_i^f$  brzina u središtu stranice kontrolnog volumena. Protok  $F$  se računa u linearizacijskom koraku na temelju poznatog polja brzine iz prethodne iteracije  $u_i^o$ , gdje nadindeks "o" označava staru vrijednost, dok se polje brzine  $u_i^f$  rješava kao zavisna varijabla sustava. Protok polja brzine kroz stranice kontrolnog volumena se računa tako da se brzina na svakoj stranici kontrolnog volumena interpolira pomoću susjednih kontrolnih volumena odabranom inetpolacijskom shemom. Ako odaberemo shemu centralnih razlika (eng. *Central Differencing Scheme-CDS*), tada se brzina na stranicama kontrolnog volumena interpolira na slijedeći način:

$$u_i^f = f_x u_i^P + (1 - f_x) u_i^N, \quad (65)$$

gdje je  $f_x$  koeficijent linearne interpolacije,  $u_i^P$  je brzina u težištu kontrolnog volumena u kojem se vrši proračun, a  $u_i^N$  je brzina u težištu susjednog kontrolnog volumena.

Na sličan način se diskretiziraju i članovi jednadžbe količine gibanja, integriranjem po kontrolnom volumenu, primjenom teorema Gauss - Ostrogradski kako slijedi:

- vremenski član diskretiziran unatražnom shemom (eng. *Backward differencing scheme - BDS*) koja daje drugi red točnosti glasi:

$$\int_{V_P} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV = V_P \frac{\frac{3}{2} u_{i,n}^P - 2 u_{i,o}^P + \frac{1}{2} u_{i,oo}^P}{\Delta t}, \quad (66)$$

gdje indeks  $n$  označava novi vremenski trenutak,  $o$  označava posljednji vremenski trenutak,  $oo$  označava pretposljednji vremenski trenutak,  $V_P$  označava kontrolni volumen u kojem se vrši proračun, a  $\Delta t$  je konačno mali vremenski odsječak,

- konvekcijski član:

$$\int_{V_P} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) dV = \oint_{S_P} u_i u_j dS_k = \sum_f F u_{i,n}^f, \quad (67)$$

te za izračun brzine u novom trenutku na stranici kontrolnog volumena koristi shema centralnih razlika:

$$u_{i,n}^f = f_x u_{i,n}^P + (1 - f_x) u_{i,n}^N, \quad (68)$$

gdje nadindeks  $N$  označava susjedni kontrolni volumen, a nadindeks  $P$  označava kontrolni volumen u kojem se trenutno vrši proračun,

- difuzijski član:

$$\int_{V_P} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dV = \oint_{S_P} v \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dS_i = \sum_f v S_i^f \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_n^f, \quad (69)$$

gdje je  $dS_i$  usmjereni diferencijal površine, a skalarni umnožak  $S_i^f \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_n^f$  računa se uz primjenu korekcije zbog neortogonalnosti ukoliko je potrebno:

$$S_i^f \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_n^f = \Delta_i \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_n^f \right]^{\text{ortogonalni}} + k_i \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_n^f \right]^{\text{neortogonalni}}, \quad (70)$$

U jednadžbi (70)  $\Delta_i$  je ortogonalni dio površinskog vektora  $S_i^f$ ,  $k_i$  je neortogonalni dio površinskog vektora  $S_i^f$ , a  $d_i$  je vektor udaljenosti težišta susjednih kontrolnih volumena.

Ortogonalni dio gradijenta polja brzine računa se na slijedeći način:

$$\Delta_i \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_n^f \right]^{\text{ortogonalni}} = |\Delta_i| \frac{u_{i,n}^N - u_{i,n}^P}{|d_i|}. \quad (71)$$

Neortogonalni dio se računa pomoću linearne interpolacije između proračunske točke (centra kontrolnog volumena u kojem integriramo jednadžbu količine gibanja) i susjednog centra:

$$\left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_n^f \right]^{\text{neortogonalni}} = f_x \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_o^P + (1 - f_x) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_o^N. \quad (72)$$

Kada se članovi jednadžbe količine gibanja u svojem diskretiziranom obliku, dani jednadžbama (66), (67) i (69), uvrste ponovo u jednadžbu količine gibanja (2) uz zanemarenje masenih sila dobije se poludiskretizirana jednadžba:

$$V_P \frac{\frac{3}{2}u_{i,n}^P - 2u_{i,o}^P + \frac{1}{2}u_{i,oo}^P}{\Delta t} + \sum_f F[f_x u_{i,n}^P + (1 - f_x)u_{i,n}^N] - \sum_f v \left( |\Delta_j| \frac{u_{i,n}^N - u_{i,n}^P}{d} + k_j \left( f_x \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_o^P + (1 - f_x) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_o^N \right) \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_j}. \quad (73)$$

Cilj numeričke aproksimacije je rješenje sustava linearnih jednadžbi koji je dobiven diskretizacijom jednadžbi (1) i (2) po svim kontrolnim volumenima diskretizirane domene.

Grupirajući koeficijente uz  $u_i^P$  i  $u_i^N$  u jednadžbi (73) dobije se:

$$u_{i,n}^P \left( V_P \frac{3}{2\Delta t} + \sum_f F f_x + \sum_f v \frac{|\Delta_i|}{|d_i|} \right) = \sum_f \left[ v \frac{|\Delta_i|}{|d_i|} - F(1 - f_x) \right] u_{i,n}^N + \frac{2}{\Delta t} V_P u_{i,o}^P - \frac{1}{2\Delta t} V_P u_{i,oo}^P + \sum_f v k_i \left( f_x \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_o^P + (1 - f_x) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_o^N \right) - \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (74)$$

Ako se koeficijenti u jednadžbi (74) u zagradama, koji se pojavljuju uz  $u_{i,n}^P$  i  $u_{i,n}^N$ , zapišu kao  $a_P$  i  $a_N$  poludiskretizirana jednadžba količine gibanja glasi:

$$a_P u_{i,n}^P = - \sum_N a_N u_{i,n}^N + S^o - \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (75)$$

Sažetiji zapis jednadžbe (75) se dobije uvođenjem operatora  $H(u_i)$ :

$$H(u_i) = - \sum_N a_N u_{i,n}^N + S^o, \quad (76)$$

pa slijedi:

$$a_P u_{i,n}^P = H(u_i) - \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (77)$$

gdje  $S^o$  označava dodatne izvorske članove koji su rezultat korekcije zbog neortogonalnosti i vremenskog člana. Izvorski članovi su smješteni na desnoj strani jednadžbe, te se mogu izračunati. Nose vrijednosti iz starijih vremenskih trenutaka tj. oni su ulazna vrijednost u linearni sustav. Jednadžba (77) sadrži u sebi gradijent tlaka kao i polje brzine. Kada bi polje tlaka bilo poznato trebalo bi biti takvo da kada se uvrsti u jednadžbu (77) kao rezultat daje suvislo polje brzina. To polje brzina mora zadovoljiti jednadžbu kontinuiteta (1). Izrazi li se polje brzine iz jednadžbe (77) dobije se:

$$u_{i,n}^P = \frac{1}{a_P} H(u_i) - \frac{1}{a_P} \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (78)$$

To polje brzina mora zadovoljiti jednadžbu kontinuiteta (1) te iz tog uvjeta slijedi:

$$\frac{\partial u_{i,n}^P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{a_P} H(u_i) - \frac{1}{a_P} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right] = 0, \quad (79)$$

odnosno:

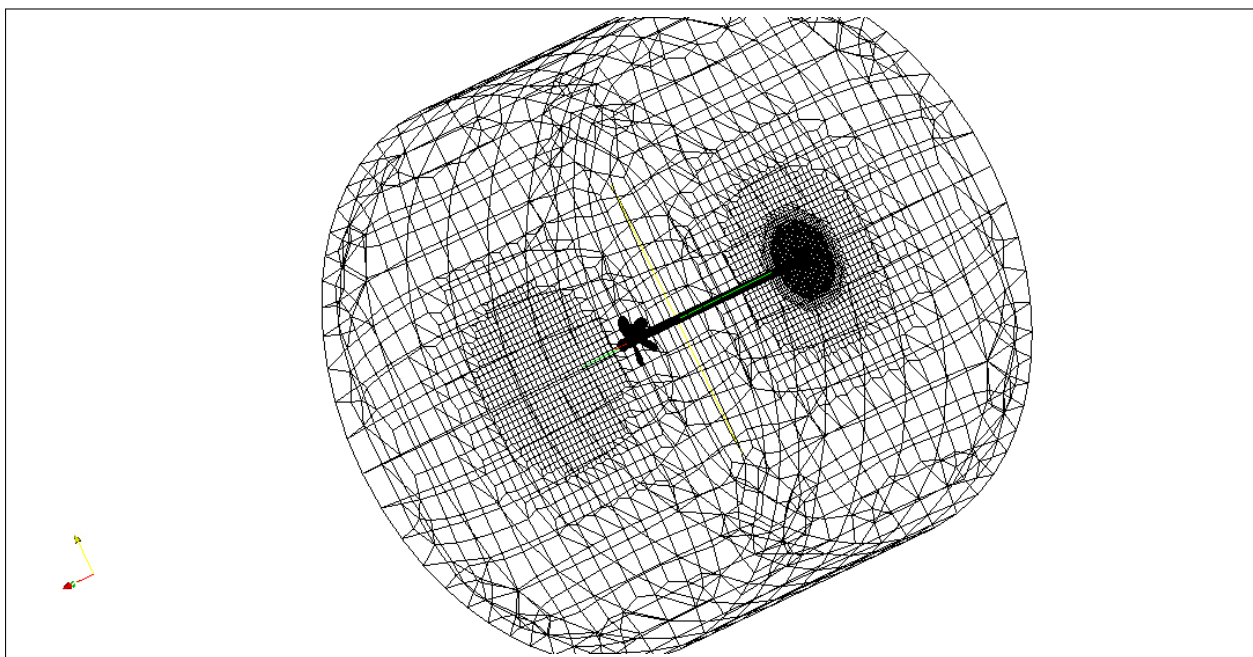
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{a_P} H(u_i) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{a_P} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right]. \quad (80)$$

Jednadžba (80) za tlak je izvedena primjenom jednadžbe kontinuiteta (1). To znači da polje tlaka za koje se ta jednadžba rješava mora biti takvo da rezultira solenoidalnim poljem brzine. Uz pretpostavku da su i polje tlaka i polje brzina nepoznati, sustav se mora riješiti pretpostavkom

početnog polja tlaka ili brzine, a do rješenja koje konvergira se dolazi numeričkim iteracijama. Detaljnije o tome čitatelj može naći u [17].

## 2.6 Diskretizacija domene fluida

Diskretizacija domene fluida u kontrolne volumene je napravljena pomoću automatskog alata cf-Mesh u kojem korisnik definira željenu veličinu kontrolnih volumena uz krute stijenke. Za zadanu geometriju broskog vijka i unaprijed određene dimenzije okolne domene fluida, koja je odabrana tako da obuhvati utjecaj broskog vijka na okolno strujanje fluida, alat je generirao trodimenzij-sku mrežu kontrolnih volumena. Mreža ima oko 700000 kontrolnih volumena. Ulazni podaci za diskretizaciju su geometrija broskog vijka s diskretiziranom površinom i veličina domene fluida u kojoj se nalazi brodski vijak. Više o cfMesh alatu se može naći u [18]. Na Slici 1. se može vidjeti diskretizirana domena tekućine.



Slika 1. Diskretizirana domena tekućine

### 3 Pokus slobodne vožnje brodskog vijka

Za određivanje hidrodinamičkih značajki vijka potrebno je provesti pokus slobodne vožnje modela vijka u homogenom polju brzina. U slučaju takvog strujanja, brzina nastrujavanja vode vijku jednaka je u svim točkama diska vijka. Rezultati pokusa slobodne vožnje vijka koriste se kao osnova za projektiranje vijka za novi brod.

Eksperimentalni podatci koji će se koristiti za usporedbu rezultata dobiveni su provođenjem pokusa slobodne vožnje vijka. Slobodna vožnja vijka je pokus koji se provodi u bazenu, pri čemu je model brodskog vijka spojen na strujno oblikovanu lađicu. Lađica je opremljena mjernim instrumentima među kojima je dinamometar za mjerenje sile poriva te momenta na vijku i brojač okretaja brodskog vijka. Vijku se dovodi snaga preko vratila od elektromotora, te se lađica vuče kroz bazen. Pomoću pokusa slobodne vožnje vijka dobivaju se radne karakteristike vijka kao što su sila poriva, moment i iskoristivost vijka u homogenom polju brzine.

#### 3.1 Zakon sličnosti kod proračuna brodskog vijka

Pokus slobodne vožnje brodskog vijka se provodi na modelu brodskog vijka koji je umanjen od prototipa u svim dimenzijama za mjerilo  $C_L$ :

$$C_L = \frac{D_S}{D_M}, \quad (81)$$

gdje je  $C_L$  mjerilo geometrijske sličnosti,  $D_S$  je promjer prototipa vijka, a  $D_M$  je promjer modela vijka. Ponekad nije moguće zadržati geometrijsku sličnost debljine izlaznog brida krila vijka zbog čvrstoće. Da bi mogli preslikati rezultate pokusa slobodne vožnje vijka s modela na prototip treba biti zadovoljena kinematička sličnost. Za kinematičku sličnost vrijedi da brzine i akceleracije u odgovarajućim prostorno vremenskim točkama trebaju ležati na istim ili paralelnim pravcima i imati isti smjer, a veličine im trebaju biti u stalnom odnosu. Zbog toga odnos aksijalne brzine napredovanja vijka i obodne brzine vijka u istoj radnoj točki treba biti isti za model i za prototip:

$$J = \frac{U_{AM}}{n_M D_M} = \frac{U_{AS}}{n_S D_S}, \quad (82)$$

gdje je  $U_{AM}$  brzina napredovanja modela vijka,  $U_{AS}$  je brzina napredovanja prototipa,  $n_M$  je broj okretaja modela vijka,  $n_S$  je broj okretaja prototipa dok je  $J$  koeficijent napredovanja za kojeg vrijedi:

$$J_M = J_S. \quad (83)$$

Za postizanje dinamičke sličnosti duboko uronjenog vijka bez utjecaja slobodne površine treba ostvariti jednakost Reynoldsovih brojeva za model i prototip vijka. U slučaju kada model vijka

radi na krmi iza modela broda mora se zadovoljiti jednakost Froudeova i Reynoldsovog broja:

- iz jednakosti Froudeova broja na temelju obodne brzine vijka dolazi se do izraza koji definira odnos broja okretaja modela i prototipa vijka:

$$Fn_M = Fn_S, \quad (84)$$

$$\left( \frac{n\pi D}{\sqrt{gD}} \right)_M = \left( \frac{n\pi D}{\sqrt{gD}} \right)_S, \quad (85)$$

$$n_M = \sqrt{\frac{D_S}{D_M}} n_S = \sqrt{C_L} n_S, \quad (86)$$

gdje je  $Fn_M$  Froudeov broj za model dok je  $Fn_S$  Froudeov broj za prototip.

- iz jednakosti Reynoldsovih brojeva za model i prototip koji se definira na  $0,7R$ :

$$Rn_M = Rn_S, \quad (87)$$

$$Rn = \frac{l_{0,7R} n \pi D}{v}, \quad (88)$$

te uz uvjet  $v_M = v_S$  slijedi:

$$(l_{0,7R} n D)_M = (l_{0,7R} n D)_S, \quad (89)$$

$$n_M = n_S C_L^2, \quad (90)$$

gdje je  $Rn_M$  Reynoldsov broj za model,  $Rn_S$  je Reynoldsov broj za prototip,  $l_{0,7R}$  je duljina profila krila na  $0,7R$ , a  $R$  je polumjer vijka.

Iz toga slijedi da nije moguće istovremeno zadovoljiti obje sličnosti, zbog čega se zadovoljava samo sličnost Froudeovog broja. Reynoldsov broj se drži iznad kritične vrijednosti  $Rn > 10^5$ , pri čemu se smatra da Reynoldsov broj nema utjecaja na mjerilo.

U pokusu slobodne vožnje vijka se mjeri poriv modela vijka  $T_M$ , moment modela vijka  $Q_M$ , broj okretaja modela vijka  $n_M$  i brzina napredovanja modela vijka  $U_{AM}$ . Na temelju izmjerenih vrijednosti definiraju se slijedeći bezdimenzijski hidrodinamički koeficijenti:

- koeficijent poriva:

$$K_T = \frac{T_P}{\rho n^2 D^4}, \quad (91)$$

- koeficijent momenta:

$$K_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5}, \quad (92)$$

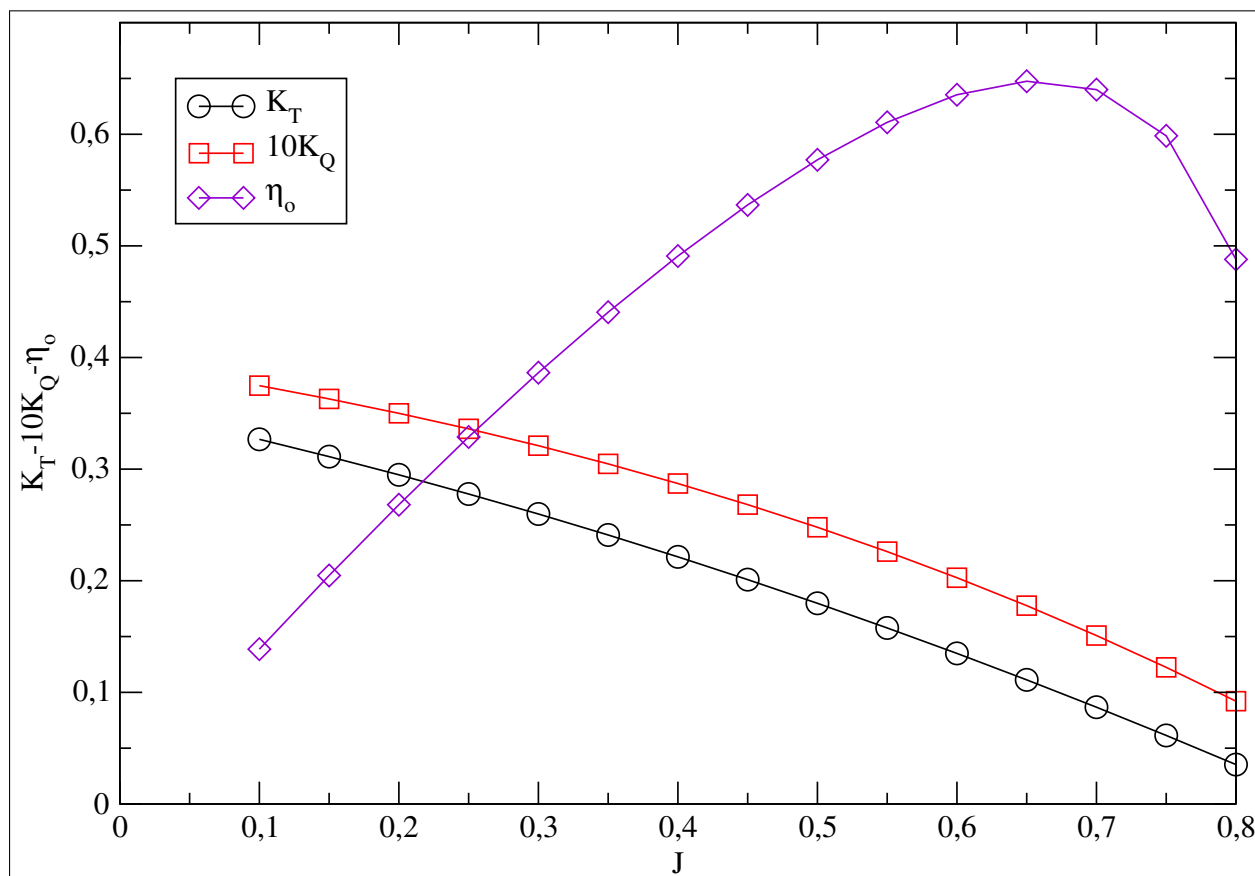


- stupanj djelovanja vijka u slobodnoj vožnji:

$$\eta_o = \frac{J K_T}{2\pi K_Q}, \quad (93)$$

gdje je  $T_P$  sila poriva,  $Q$  je moment na vijku.

Koeficijenti poriva i koeficijent momenta te stupanj djelovanja vijka se prikazuju u dijagramu slobodne vožnje vijka kao funkcija koeficijenta napredovanja  $J$  kao što je prikazano na Slici 2.



Slika 2. Dijagram slobodne vožnje vijka

## 4 Postavke numeričke simulacije slobodne vožnje vijka

U ovom poglavlju opisane su postavke za izvršavanje numeričke simulacije (eng. *preprocessing*) u programskom paketu OpenFOAM. Dane su geometrijske karakteristike vijka, nakon čega je opisana zadana kinematika vijka, rubni uvjeti na granicama domene, te postavke modela turbulencije.

### 4.1 Geometrija broskog vijka

Osnovne geometrijske značajke modela broskog vijka su:

- promjer vijka:

$$D = 0,203 \text{ m} ,$$

- uspon vijka (konstantan):

$$P = 0,15225 \text{ m} ,$$

- omjer uspona i promjera:

$$\frac{P}{D} = 0,75 ,$$

- omjer razvijene površine i površine diska vijka:

$$\frac{A_E}{A_0} = 0,5 ,$$

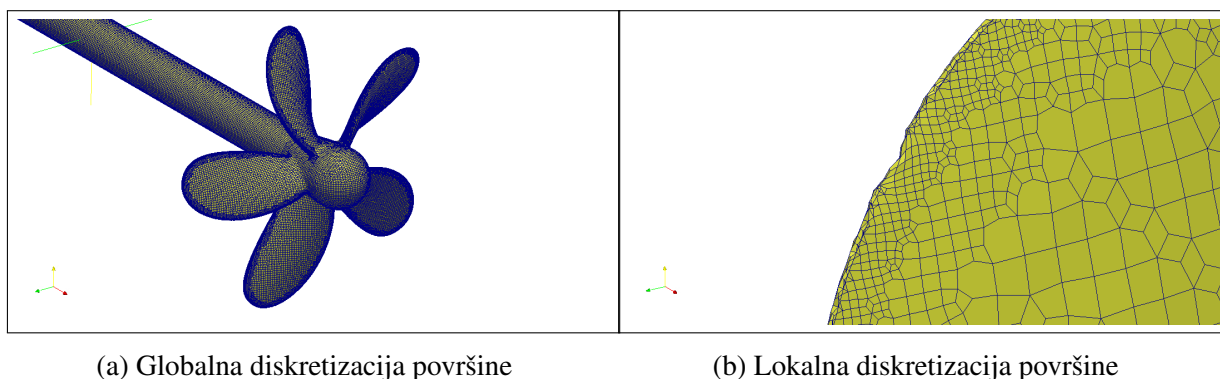
- omjer promjera glavine i promjera vijka:

$$\frac{D_G}{D} = 0,18 ,$$

- broj krila vijka

$$Z = 5 .$$

S geometrijskim karakteristikama broskog vijka je izrađen 3D model broskog vijka te je izvršena diskretizacija površine modela broskog vijka. Diskretizacija površine, prikazana na Slici 3a., je neophodna za daljnju diskretizaciju domene. Na Slici 3b. se može uočiti greška u diskretizaciji površine vijka na napadnom bridu zbog grube diskretizacije.



Slika 3. Diskretizacija površine brodskog vijka

## 4.2 Kinematika brodskog vijka

Kinematika brodskog vijka zadana je omjerom brzine napredovanja i brzine rotacije brodskog vijka, koji se izražava pomoću bezdimenzijskog koeficijenta napredovanja  $J$ . Za simulaciju će se koristiti isti koeficijent napredovanja koji se koristio pri pokusu slobodne vožnje vijka. U našem slučaju raspoložemo s diskretnim skupom podataka za koeficijent napredovanja. S obzirom da će se simulirati stacionarno strujanje oko brodskog vijka što podrazumijeva konstantnu brzinu nastrujavanja vode vijku i rotacije vijka, morat će se provesti simulacija za svaku diskretnu vrijednost koeficijenta napredovanja. Iz bezdimenzijskog koeficijenta napredovanja i poznate vrijednosti broja okretaja vijka mogu se izračunati brzine napredovanja za svaki koeficijent napredovanja. U Tablici 1. su prikazani bezdimenzijski koeficijenti napredovanja i odgovarajući brojevi okretaja i brzine napredovanja.

Tablica 1. Kinematičke značajke vijak

$J$	$n, 1/s$	$U_A, m/s$
0,10	8,935	0,1814
0,15	8,935	0,272
0,20	8,935	0,363
0,25	8,935	0,453
0,30	8,935	0,544
0,35	8,935	0,635
0,40	8,935	0,726
0,45	8,935	0,816
0,50	8,935	0,907
0,55	8,935	0,998
0,60	8,935	1,088
0,65	8,935	1,179
0,70	8,935	1,27
0,75	8,935	1,36
0,80	8,935	1,451

### 4.3 Rubni uvjeti na granicama domene

Domena u kojoj se nalazi brodski vijak mora biti tolika da se utjecaj vijka na okolni fluid do granice domene smanji do zanemarive razine. Domena u kojoj se nalazi brodski vijak je cilindričnog oblika budući je brodski vijak rotirajući uređaj. Dimenzije domene prikazane su u Tablici 2. gdje su  $D_C$  i  $L_C$  promjer i duljina domene. Omjeri veličina vijka i cilindrične domene fluida oko vijka su:

$$\frac{D_C}{D} = 10,837 \quad (94)$$

$$\frac{L_C}{L_P} = 22,9 \quad (95)$$

Omjeri (94) i (95) su odabrani po preporukama iz [19].

Tablica 2. Dimenzije proračunske domene fluida

$D_C, m$	2,2
$L_C, m$	1,45

Rubni uvjeti zadani na granicama domene su:

- Rubni uvjet za brzinu na ulazu fluida u domenu je Dirihletov rubni uvjet (5) koji propisuje vrijednost varijable na granici domene.
- Rubni uvjet za brzinu na izlazu fluida iz domene je nulti gradijent tzv. von Neumanov rubni uvjet (6) to znači da se strujanje fluida nastavlja bez promjena.
- Rubni uvjet za brzinu na plaštu cilindra domene je također nulti gradijent tzv. von Neumanov rubni uvjet (6).
- Rubni uvjet za tlak je na svim granicama definiran kao von Neumanov rubni uvjet (6) nultog gradijenta.
- Rubni uvjet za specifičnu kinetičku energiju turbulencije (27) i brzinu disipacije energije se pretpostavlja u skladu s preporukama [20].

### 4.4 Rubni i početni uvjeti turbulentnih značajki

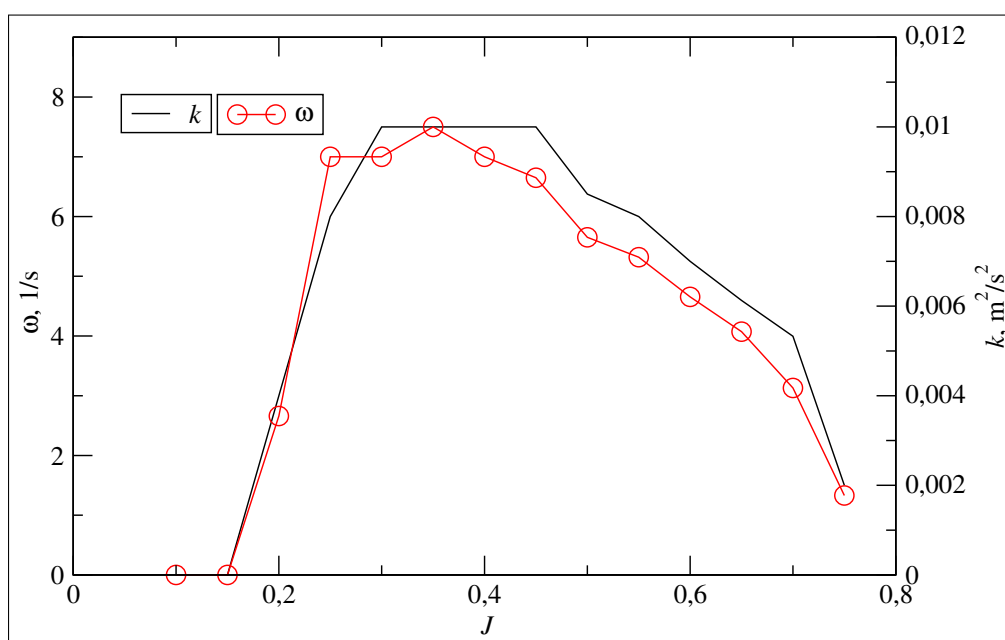
Pri provođenju simulacija s  $k - \omega$  SST modelom turbulencije moraju se postaviti početne vrijednosti za specifičnu energiju turbulencije  $k$  i brzinu disipacije energije turbulencije  $\omega$ . Početne vrijednosti  $k$  i  $\omega$  određuju se kao:

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2, \quad (96)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{l}, \quad (97)$$

gdje je  $U$  brzina neporemećene struje fluida,  $I$  je intezitet turbulencije, a  $l$  je karakteristična dužinska skala. Za početne uvjete se u ovom radu prema preporukama iz [20] pretpostavilo da je veličina  $l$  jednaka  $0,1D$ , gdje je  $D$  promjer vijka. Intezitet turbulencije se pretpostavio  $I = 0,05$  također prema preporukama iz [20]. Kada je numerička simulacija završila i zadovoljila se konvergencija rješenja, očitane su nove vrijednosti za  $k$  i  $\omega$  u neporemećenoj struji fluida te su te vrijednosti uzete kao početni uvjeti za sljedeću simulaciju.

Na slici 4 je prikazana ovisnost početnog uvjeta specifične kinetičke energije turbulencije  $k$  i brzine disipacije kinetičke energije  $\omega$  u ovisnosti o koeficijentu napredovanja  $J$ .



Slika 4. Promjena početnog uvjeta specifične kinetičke energije turbulencije  $k$  i brzine disipacije kinetičke energije  $\omega$  u ovisnosti o koeficijentu napredovanja  $J$

## 5 Numeričke simulacije slobodne vožnje brodskog vijka

U ovom poglavlju je izvršena detaljna analiza rezultata numeričke simulacije slobodne vožnje vijka za slučaj najveće iskoristivosti vijka, a to je za slučaj koeficijenta napredovanja  $J = 0,65$ . Simulacije za ostale vrijednosti koeficijenta napredovanja su dane na kraju kako bi se rezultati numeričkih simulacija usporedili s eksperimentalnim rezultatima.

Simulacije su provedene u programskom paketu OpenFOAM pri čemu se koristio program MRF-SimpleFoam koji je opisan u poglavlju 2. Simulacija je provedena na računalu s procesorom Intel Core2 Quad CPU Q6600 @ 2.40GHz i radnom memorijom veličine 8GB tipa DDR2. Na takvom računalu prosječno trajanje simulacije je dva sata. Numeričke simulacije su izvršene paralelno na 4 procesora. U svakoj simulaciji je provedeno najmanje 1000 iteracija pri čemu je srednja relativna pogreška za 1000 iteracija:

- za brzinu:  $10^{-5}$ ,
- za tlak:  $10^{-4}$ ,
- za zadovoljenje jednadžbe kontinuiteta:  $10^{-6}$ .

Iz navedenih podataka možemo zaključiti da je nakon 1000 iteracija konvergencija zadovoljena obzirom da su postignute dovoljno male pogreške.

### 5.1 Konvergencija integralnih veličina

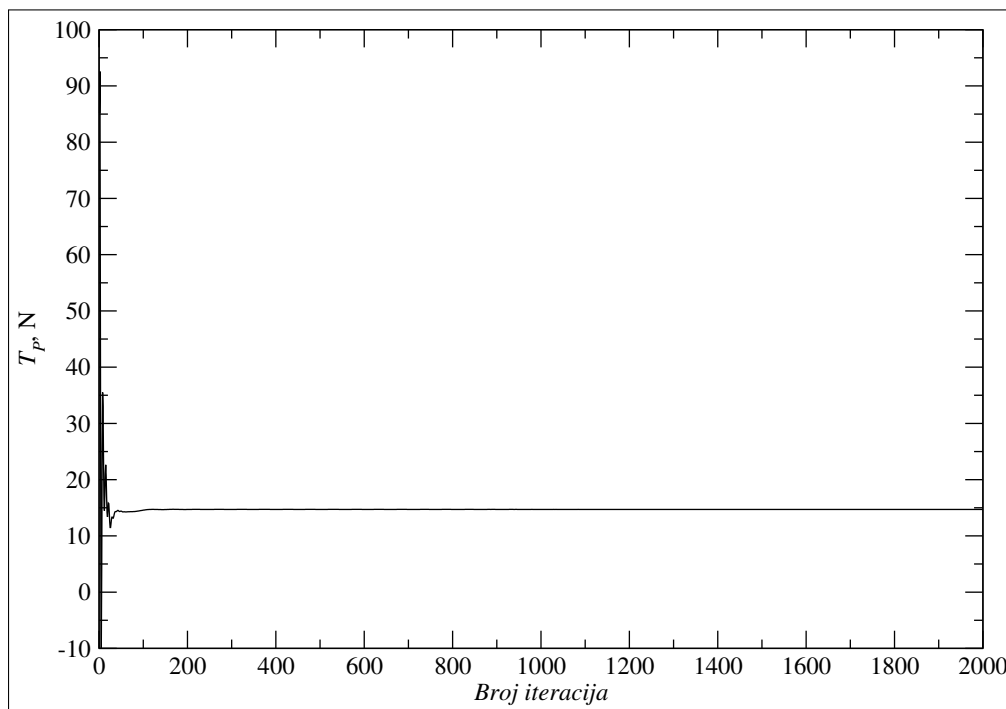
Integriranjem tlaka i viskoznog tangencijalnog naprezanja po površini krila i glavine vijka računa se sila poriva  $T_p$  i moment poriva  $Q$ . Da bi se rješenje numeričke simulacije smatralo valjanim ono mora biti dovoljno konvergirano. Konvergiranim rješenjem se smatra rješenje čija se vrijednost u novom iterativnom rješenju od rješenja u prethodnom koraku iteracije razlikuje za neku malu proizvoljno zadanu vrijednost. Slika 5. prikazuje konvergenciju sile poriva u odnosu na broj iteracija. Kao što se može vidjeti, rješenje se nakon 200-te iteracije gotovo ne mijenja. Slika 6. prikazuje vrijednost sile poriva tijekom zadnjih 200 iteracija. Najveće relativno odstupanje sile poriva je malo u odnosu na vrijednost sile poriva:

$$U_{IT} = \frac{14,71 - 14,7075}{14,709} \cdot 100 = 0,017 \% , \quad (98)$$

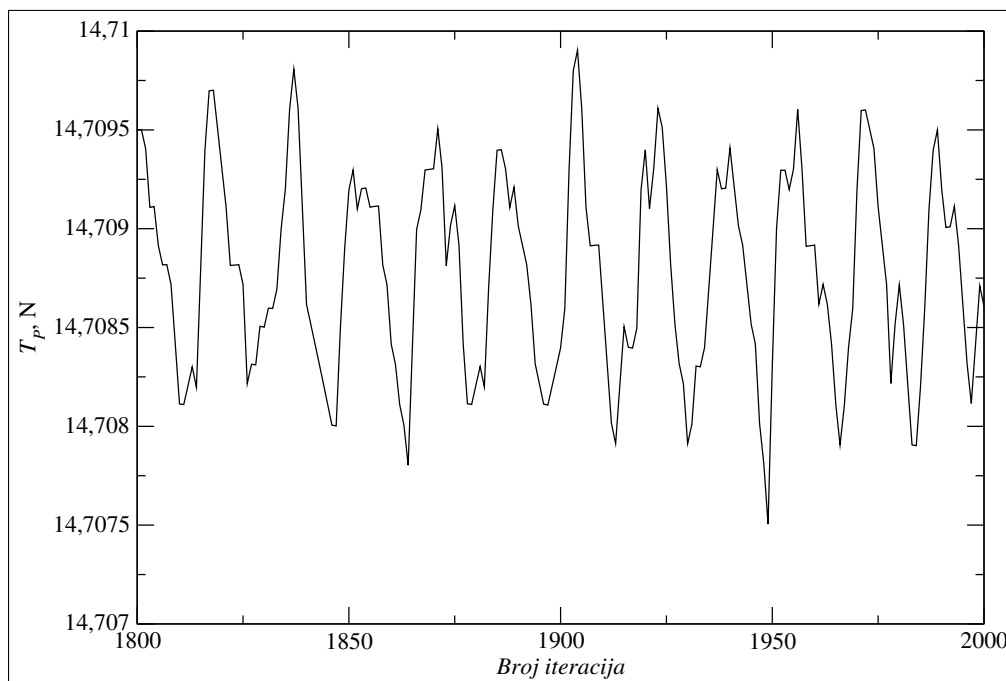
gdje je  $U_{IT}$  relativna odstupanje sile poriva od očekivane vrijednosti sile poriva. Slično kao i za silu poriva može se prikazati konvergencija momenta poriva Slika 7. Uvidom u zadnjih 200 iteracija, Slika 8, može se vidjeti da je relativno odstupanje momenta od očekivanog iznosa momenta mala vrijednost:

$$U_{IQ} = \frac{0,48627 - 0,48623}{0,48623} \cdot 100 = 0,00823 \% . \quad (99)$$

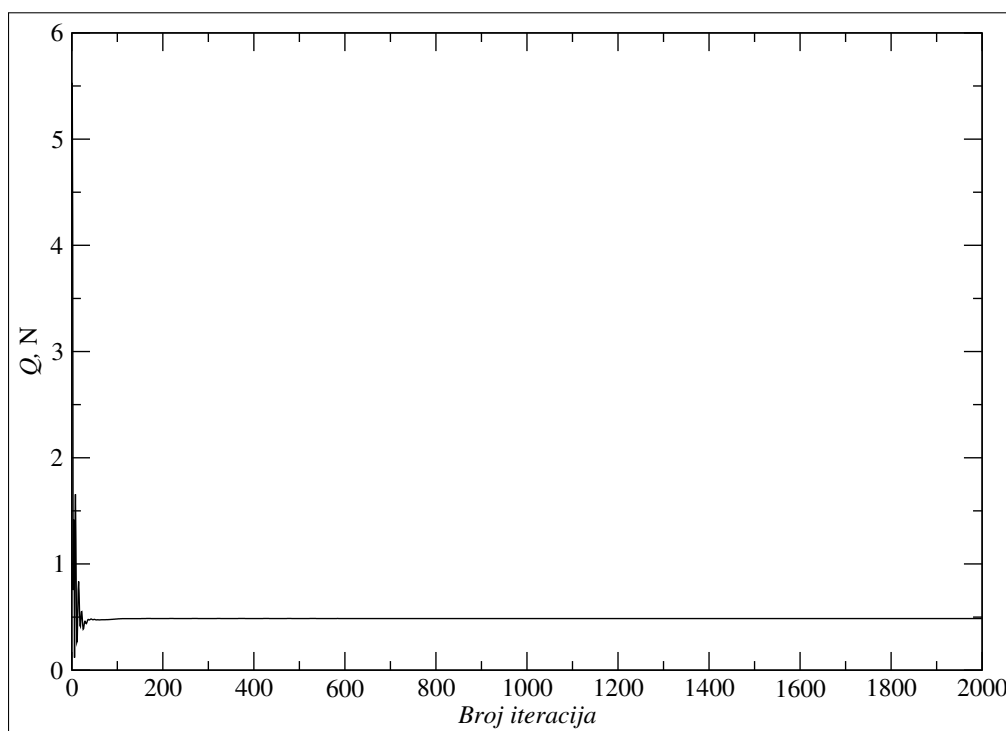
gdje je  $U_{IQ}$  relativno odstupanje vrijednosti momenta od očekivane vrijednosti momenta. Očito je da je rješenje konvergiralo do zadovoljavajuće vrijednosti, što upućuje na stabilnu simulaciju s fizikalno valjanim postavkama.



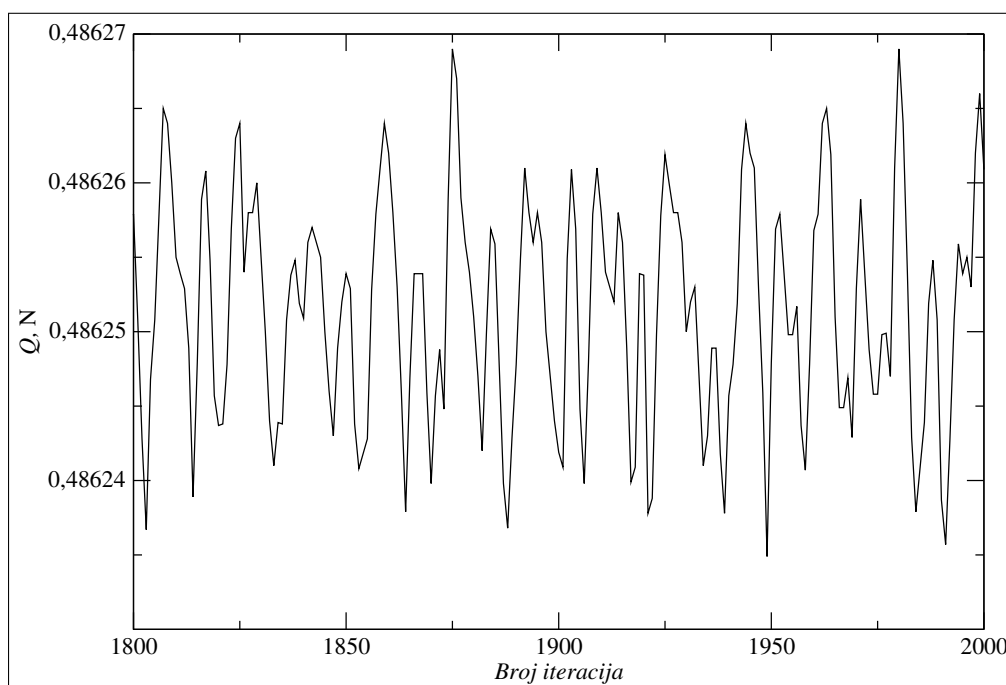
Slika 5. Konvergencija sile poriva za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$



Slika 6. Konvergencija sile poriva u zadnjih 200 iteracija za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$



Slika 7. Konvergencija momenta na vijku za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$



Slika 8. Konvergencija momenta na vijku u zadnjih 200 iteracija za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$

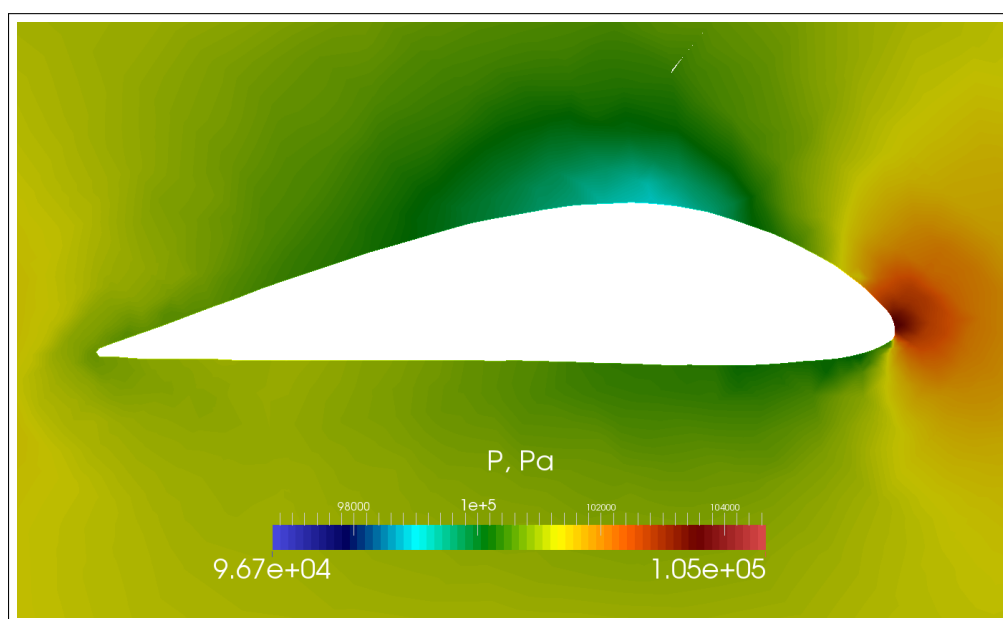


## 5.2 Polje tlaka oko krila vijka

Poznavanjem polja tlaka oko krila vijka može se utvrditi postoji li mogućnost kavitiranja vijka pri radu u optimalnoj radnoj točki. Kavitacija na brodskom vijku je pojava isparavanja tekućine zbog pada tlaka na krilu vijka, koji nastaje opstrujavanjem tekućine oko krila vijka. Usporedbom minimalnog tlaka na krilu vijka i tlaka isparavanja vode pri temperaturi vode koja je određena uvjetima bazena može se predvidjeti kavitacija. Pogleda li se polje tlaka na profilu krila vijka na različitim radijusima  $r/R = 0,3$ , Slika 9.,  $r/R = 0,5$ , Slika 10.,  $r/R = 0,7$ , Slika 11. i  $r/R = 0,9$ , Slika 12., može se primjetiti gdje je najniži apsolutni tlak na vijku.

Na Slikama 9.-13. vidi se da je najniža vrijednost tlaka  $P = 9,4 \cdot 10^4$  Pa.

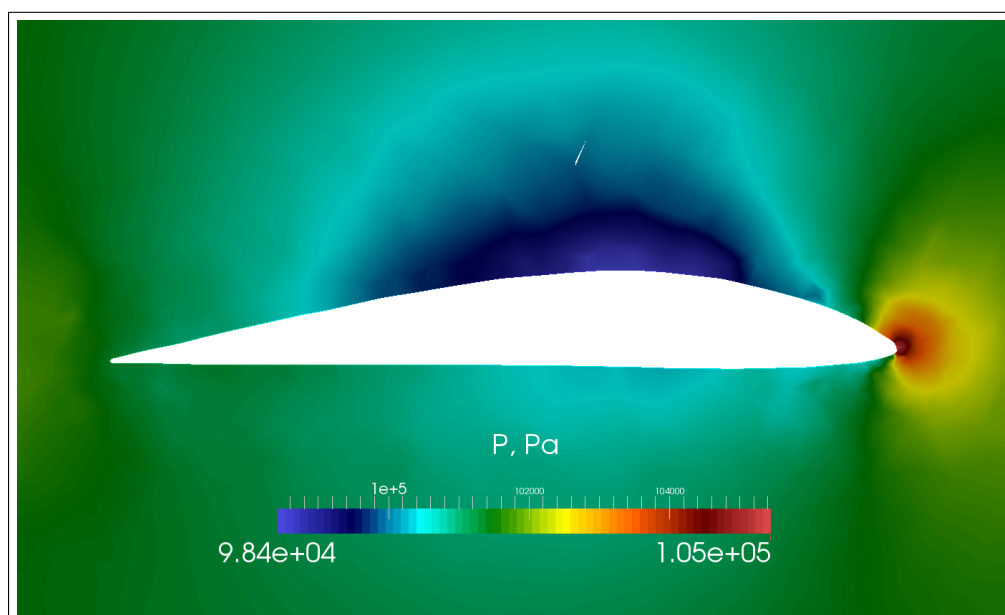
Vrijednost tlaka pri kojem voda počinje isparavati na temperaturi od  $20^\circ\text{C}$  iznosi  $P_v = 2500$  Pa, iz čega se može zaključiti da model vijka neće kavitirati pri ovim uvjetima rada. Za ispitivanje pojave kavitacije i predviđanje njenog utjecaja na prototip, model se treba ispitati u kavitacijskom tunelu uz zadovoljenje jednakosti kavitacijskih brojeva za model i prototip vijka.



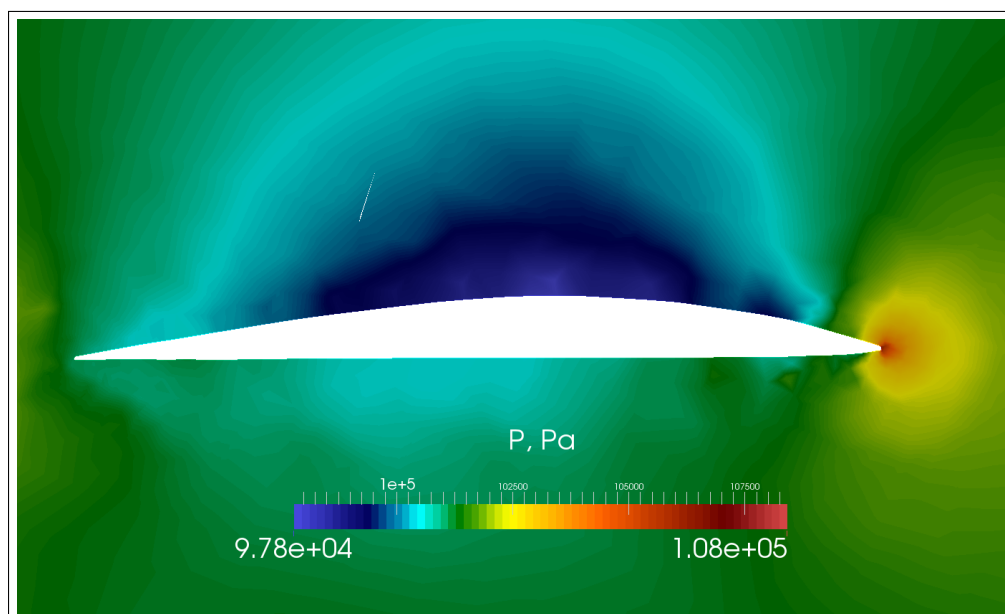
Slika 9. Polje tlaka oko profila krila vijka na  $r/R = 0,3$  za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$

Slika 13. prikazuje raspodjelu tlaka na podtlačnoj strani krila vijka. Minimalna vrijednost tlaka je na vrhu krila vijka što je i bilo za očekivati.

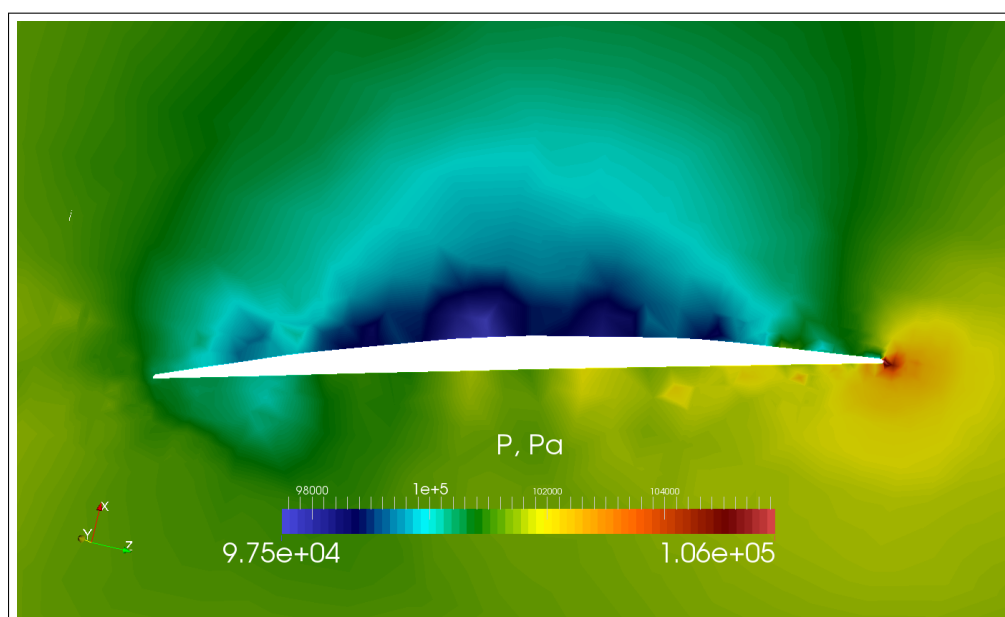
Nakon ovog razmatranja može se zaključiti da se pri simuliranju slobodne vožnje modela vijka ne mora uzeti u obzir kavitacija, jer pad tlaka na vijku nije toliki da bi uzrokovao isparavanje vode.



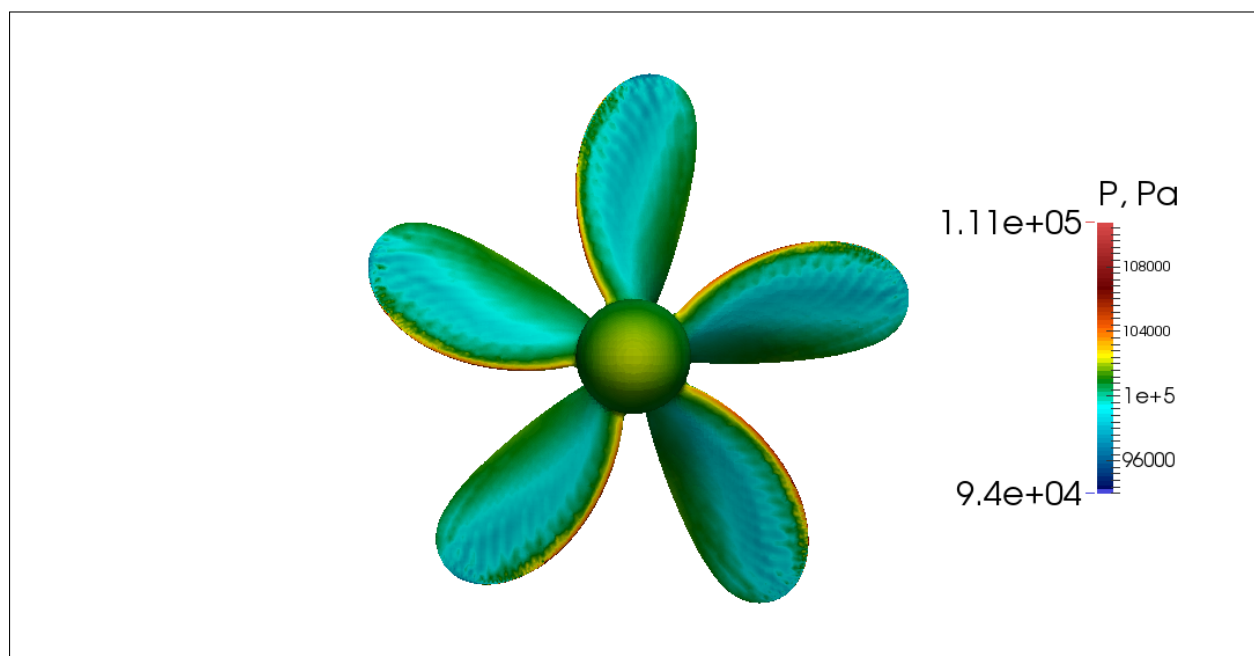
Slika 10. Polje tlaka oko profila krila vijka na  $r/R = 0,5$  za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$



Slika 11. Polje tlaka oko profila krila vijka na  $r/R = 0,7$  za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$



Slika 12. Polje tlaka oko profila krila vijka na  $r/R = 0,9$  za koeficijent napredovanja  $J = 0,65$



Slika 13. Vrijednost tlaka na podtlačnoj strani vijka (naličje)

### 5.3 Usporedba rezultata numeričke simulacije

Da bi se validirala točnost numeričkih simulacija slobodne vožnje vijka potrebno je rezultate simulacija usporediti s eksperimentalnim podacima. Za slučaj koeficijenta napredovanja  $J = 0,65$  usporedbom rezultata se dobiju slijedeće relativne pogreške:

- za silu poriva  $T_P$ :

$$E_{K_T} = \frac{K_T^{\text{eksperiment}} - K_T^{\text{RDF}}}{K_T^{\text{eksperiment}}} \cdot 100 = 2,18 \% , \quad (100)$$

- za moment na vijku  $Q$ :

$$E_{K_Q} = \frac{K_Q^{\text{eksperiment}} - K_Q^{\text{RDF}}}{K_Q^{\text{eksperiment}}} \cdot 100 = 0,32 \% . \quad (101)$$

Kao što vidimo iz jednadžbi (100) i (101) relativna pogreška simulacije je unutar 3 % za projektnu točku. Točniji rezultati bi se dobili direktnim proračunom (eng. *Direct Numerical Simulation-DNS*), no za to bi se morala napraviti mreža takve finoće da kontrolni volumeni budu veličine najmanjih vrtloga. Za takav proračun su potrebni veliki računalni resursi, koji nisu trenutno dostupni u Tablici 3. su prikazane relativne pogreške za pojedine koeficijente napredovanja. Može se vidjeti da je za koeficijent poriva  $K_T$  najmanja relativna pogreška 2,04 %, dok je maksimalna relativna pogreška 30,43 % za točku gdje je vrlo niska vrijednost stupnja djelovanja vijka. Također se može primijetiti da je za koeficijent momenta  $K_Q$  najmanja relativna pogreška 0,32 % u projektnoj točki, a najveća relativna pogreška je -17,85 % za točku, gdje je vrlo niska vrijednost stupnja djelovanja vijka, što je prikazano u Tablici 4. Očito je da primijenjene postavke numeričke simulacije dobro predviđaju silu poriva i moment na vijku za optimalno nastrujavanje (povoljan kut nastrujavanja) tekućine na krilo vijka, dok pogreška raste s padom kuta nastrujavanja tj. za kutove nastrujavanja koji su manji od idealnog. Za idealni kut relativna pogreška, za koeficijent poriva  $K_T$  i za koeficijent momenta poriva  $K_Q$ , je relativno mala dok za kuteve koji su manji od idealnog napadnog kuta (velika brzina napredovanja i nizak broj okretaja vijka) relativna pogreška raste. U Tablici 4. dana je usporedba rezultata za stupanj djelovanja vijka u slobodnoj vožnji. Može se vidjeti da je za neke vrijednosti koeficijenta napredovanja  $J$  relativna pogreška stupnja djelovanja vijka relativno mala iako su relativne pogreške koeficijenta poriva i momenta značajne. Najmanja relativna pogreška stupnja djelovanja vijka je za  $J = 0,40$  i iznosi 0,17 %, dok je najveća relativna pogreška za  $J = 0,80$  i iznosi -40,96 %.

U većini slučajeva relativna pogreška za koeficijent poriva  $K_T$  i koeficijent momenta  $K_Q$  je ispod 9 %, dok je za stupanj djelovanja vijka u slobodnoj vožnji  $\eta_o$  relativna pogreška uglavnom ispod 4 %. Prosječna relativna pogreška za koeficijent poriva  $K_T$  je 9,61 %, za koeficijent momenta  $K_Q$  je 7,14 %, dok za stupanj djelovanja vijka u slobodnoj vožnji  $\eta_o$  iznosi 5,35 %.

Tablica 3. Relativna greška koeficijenta poriva i koeficijenta momenta

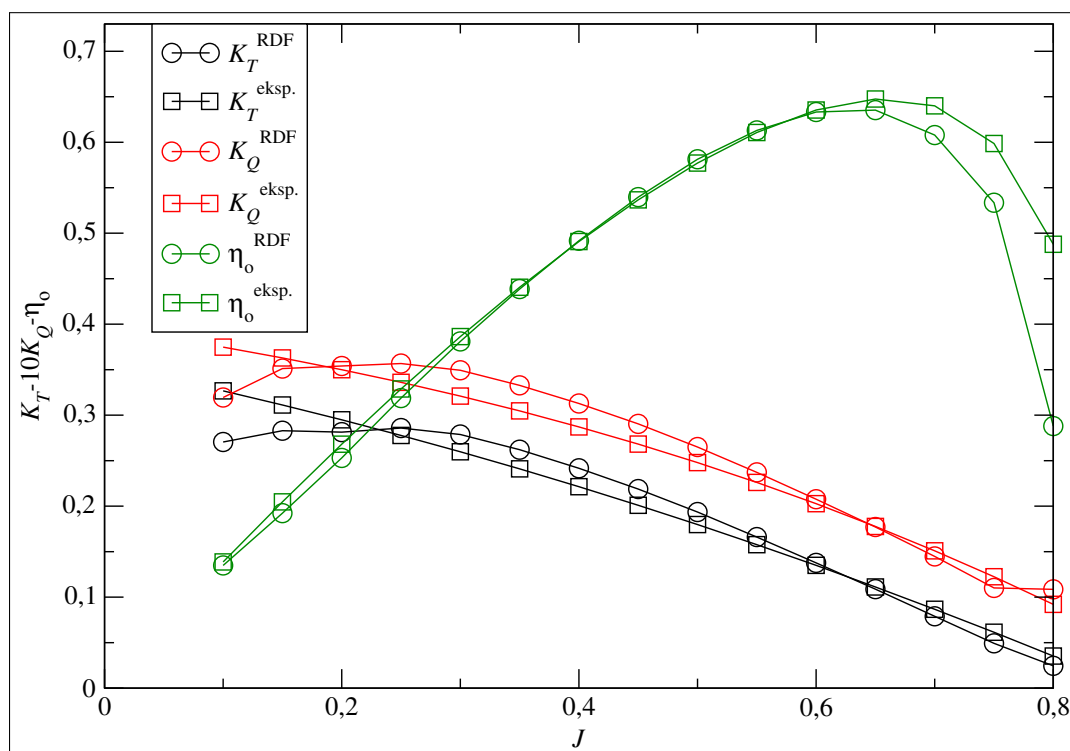
$J$	$K_T^{\text{RDF}}$	$K_T^{\text{eksperiment}}$	$E_{K_T}, \%$	$K_Q^{\text{RDF}}$	$K_Q^{\text{eksperiment}}$	$E_{K_Q}, \%$
0,10	0,27055	0,3267	17,19	0,03194	0,03748	14,78
0,15	0,28295	0,3112	9,08	0,03512	0,03629	3,22
0,20	0,28137	0,2949	4,59	0,03540	0,035	-1,15
0,25	0,28583	0,2777	-2,93	0,03568	0,03361	-6,15
0,30	0,27875	0,2598	-7,29	0,03493	0,0321	-8,82
0,35	0,26203	0,241	-8,72	0,03328	0,03047	-9,22
0,40	0,24168	0,2214	-9,16	0,03129	0,02871	-8,98
0,45	0,21884	0,201	-8,87	0,02904	0,02682	-8,28
0,50	0,19354	0,1798	-7,64	0,02650	0,02479	-6,88
0,55	0,16605	0,1577	-5,30	0,02371	0,02261	-4,87
0,60	0,13766	0,1349	-2,04	0,02076	0,02027	-2,42
0,65	0,10878	0,1112	2,18	0,017714	0,01777	0,32
0,70	0,07897	0,0867	8,92	0,01447	0,01509	4,09
0,75	0,04921	0,0614	19,85	0,01101	0,01224	10,06
0,80	0,0245	0,0353	30,43	0,01085	0,00921	-17,85

U dijagramu slobodne vožnje vijka, Slika 14., prikazane su su vrijednosti dobivene numeričkim simulacijama i eksperimentom. Krivulje koeficijent poriva, momenta i stupnja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji dobivene numeričkim simulacijama i eksperimentom se vrlo dobro poklapaju. Za niske vrijednosti koeficijenta napredovanja  $J$  relativna pogreška koeficijenta poriva je značajna. Također se može vidjeti da pri velikim vrijednostima koeficijenta napredovanja također dolazi do veće relativne pogreške stupnja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji, iz razloga što koeficijent poriva  $K_T$  i koeficijent momenta  $K_Q$  imaju suprotni predznak pogrešaka.

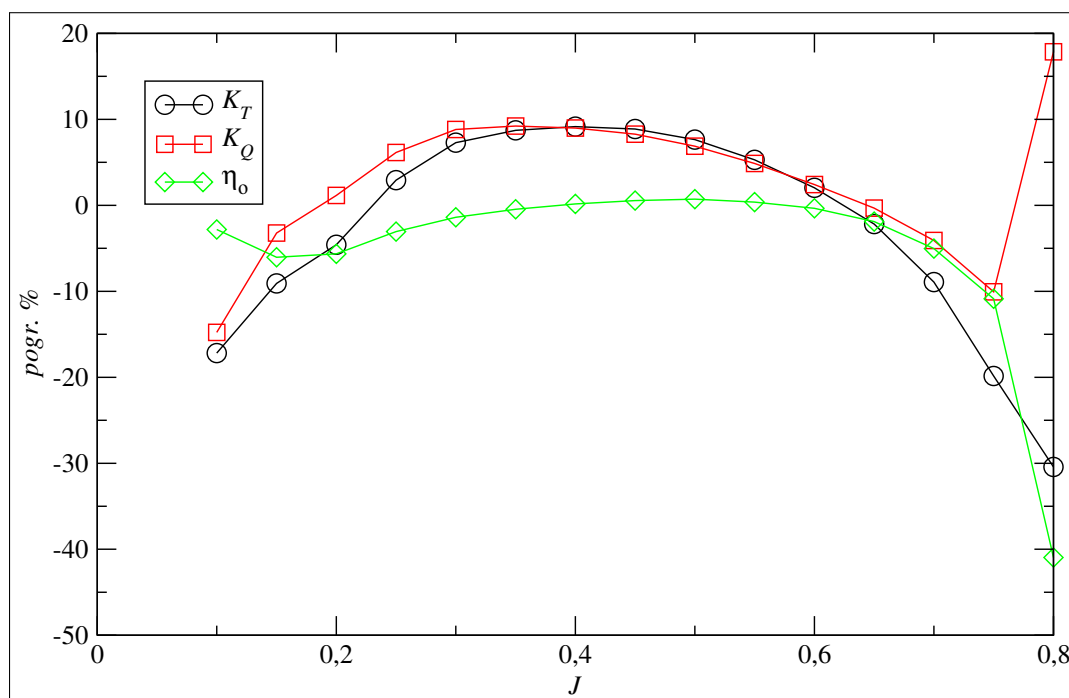
Na Slici 15. prikazane su relativne pogreške za koeficijent sile poriva, koeficijent momenta i stupnja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji u ovisnosti o koeficijentu napredovanja. Može se primijetiti da za male i velike vrijednosti koeficijenta napredovanja relativna pogreška koeficijenata poriva i momenta te stupnja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji je dostatna no za projektnu točku koja se nalazi na vrijednosti koeficijenta napredovanja  $J = 0,65$  i u okolini te projektne točke relativne pogreške tih istih veličina su u inženjerski prihvatljivim granicama.

Tablica 4. Relativna pogreška stupnja djelovanja vijka u slobodnoj vožnji

$J$	$\eta_o^{\text{RDF}}$	$\eta_o^{\text{eksperiment}}$	$\eta_o^{\text{pogr.}}, \%$
0,10	0,1348	0,1387	-2,81
0,15	0,1923	0,2047	-6,05
0,20	0,2530	0,2681	-5,64
0,25	0,3188	0,3288	-3,05
0,30	0,3810	0,3864	-1,39
0,35	0,4386	0,4406	-0,46
0,40	0,4917	0,4909	0,17
0,45	0,5397	0,5367	0,56
0,50	0,5813	0,5771	0,72
0,55	0,6130	0,6107	0,38
0,60	0,6332	0,6354	-0,35
0,65	0,6353	0,6475	-1,88
0,70	0,6078	0,6400	-5,03
0,75	0,5336	0,5986	-10,86
0,80	0,2940	0,4879	-40,96



Slika 14. Dijagram slobodne vožnje vijka dobiven numeričkim simulacijama i eksperimentom



Slika 15. Relativna pogreška za koeficijent poriva, koeficijent momenta i stupanj djelovanja vijka

## 5.4 Pogreške numeričke simulacije

Da bi se dobilo uvid koliko je određena mreža kontrolnih volumena dobra za provođenje numeričkih simulacije sa zadanim rubnim uvjetima, nakon završetka simulacije može se pogledati bezdimenzijska udaljenost težišta kontrolnih volumena koji se nalaze uz površinu vijka od površine vijka, Tablica 5. U tablici su dane vrijednosti bezdimenzijske udaljenosti od stijenke za krilo vijka i za njegov napadni brid.

Krilo vijka je podijeljeno na dva entiteta iz razloga finoće mreže koja mora biti finija za napadni brid krila vijka, jer se na napadnom bridu zbog njegovog zakrivljenja naglo mijenja geometrija vijka pa taj dio mora imati finije diskretiziranu površinu. Ostatak krila vijka ne mora imati tako finu diskretizaciju površine, jer se geometrija monotono mijenja.

Iz Tablice 5. se vidi da prosječna bezdimenzijska udaljenost težišta kontrolnih volumena, koji se nalaze na stijenci, od stijenke poprima različite vrijednosti za različite koeficijente napredovanja  $J$ . To je posljedica toga što bezdimenzijska udaljenost (51) uzima u obzir brzinu trenja koja se razlikuje za različite brzine nastrujavanja tekućine na brodski vijak. Također se vidi da bezdimenzijska udaljenost s kojom su se provodile simulacije upada u područje gdje za raspored brzina u graničnom sloju ne vrijedi ni logaritamski zakon (50) niti zakon koji vrijedi u laminarnom podsloju (54). Nastale pogreške u numeričkim simulacijama tj. odstupanja od eksperimenta su vjerojatno rezultat baš toga što je bezdimenzijska udaljenost  $y^+$  težišta prvih ćelija uz stijenk u takvu da upada točno u prijelazno područje između laminarnog podsloja i turbulentnog graničnog

Tablica 5. Vrijednost bezdimenzijske udaljenosti od stijenke  $y^+$  za različite koeficijente napredovanja  $J$

$J$	$y_{\text{napadni brid}}^+$	$y_{\text{krilo vijka}}^+$
0,10	5,63	13,26
0,15	8,78	14,63
0,20	12,17	28,10
0,25	11,49	27,63
0,30	10,92	26,85
0,35	11,05	26,86
0,40	9,57	24,23
0,45	9,14	23,49
0,50	8,47	22,17
0,55	8,04	21,45
0,60	7,47	20,40
0,65	6,86	19,43
0,70	6,13	18,49
0,75	4,15	13,81
0,80	21,10	48,59

sloja. Da bi se izbjegao taj problem trebala bi se generirati ili jako fina diskretizacija domene tekućine uz samu stijenku vijka ili jako gruba diskretizacija domene tekućine uz stijenku vijka. Fina diskretizacija tj. diskretizacija koja bi imala manje kontrolne volumene uz stijenku vijka od do sada korištene diskretizacije domene tekućine bi se mogla primjeniti jer bi vrijednost bezdimenzijske udaljenosti  $y^+$  težišta kontrolnih volumena uz stijenku vijka bila manja od 5 i onda bi se s dovoljnom pouzdanošću mogao primijeniti zakon raspodjele brzine koji vrijedni u laminarnom podsloju (54). Gruba bi pak diskretizacija omogućila upotrebu logaritamskog zakona (50) za opisivanje profila brzina u turbulentnom graničnom sloju, jer bi vrijednost bezdimenzijske udaljenosti težišta kontrolnih volumena od stijenke  $y^+$  poprimila vrijednost veću od 30 pa bi se logaritamski zakon (50) mogao primijeniti s dovoljnom točnošću, kao što je objašnjeno u podpoglavlju 2.3.4.



## 6 Zaključak

U ovom radu prikazana je primjena računalne dinamike fluida za proračun hidrodinamičkih karakteristika modela brodskog vijka u slobodnoj vožnji. Numeričke simulacije su provedene pomoću metode višestrukih referentnih koordinatnih sustava (MRF) koja rješava stacionarno strujanje fluida kod rotirajućih tijela. MRF metoda se često naziva metoda "zaleđenog" rotora iz razloga što se kontrolni volumeni u kojima se vrši proračun ne pomiču tj. ne rotiraju, već se strujanje promatra kao da se rotor zaustavio u jednom trenutku i onda se promatra polje brzine i tlaka.

Rezultati numeričkih simulacije su uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima [9] te je uočeno dobro slaganje rezultata. Pogreške numeričkih simulacija u predviđanju integralnih veličina kao što su sila poriva modela vijka, moment poriva i stupanj djelovanja vijka u slobodnoj vožnji, su najvjerojatnije posljedica gustoće mreže tj. veličine kontrolnih volumena uz samu stijenku modela brodskog vijka. Da bi se istražile pogreške u proračunu karakteristika modela brodskog vijka pomoću MRF metode, potrebno je provesti studiju konvergencije mreže. Za dobro predviđanje karakteristika brodskog vijka pomoću računalne dinamike fluida potrebno je za svaku promjenu u radnoj točki, tj. promjenu brzine napredovanja i broja okretaja brodskog vijka, provjeriti bezdimenzijsku udaljenost  $y^+$  težišta kontrolnih volumena na stijenci od stijenke brodskog vijka. Ako je vrijednost bezdimenzijske udaljenosti  $y^+$  manja od 5 i veća od 30, dobiveni rezultati trebali bi se dobro slagati s rezultatima eksperimenta. Na rezultate utječe i predviđena početna vrijednost parametara turbulencije za  $k - \omega$  SST model turbulencije.

Nakon izvršenih numeričkih simulacija može se reći da brodski vijak, koji je projektiran za brodove koji plove na relativno niskom Froudeovom broju, nije jako turbulentan uređaj. Intenzitet fluktuacije brzine  $I$  je parametar prepušten procjeni pri izračunu početnih vrijednosti specifične kinetičke energije turbulencije  $k$  i iznosi oko 5 % brzine napredovanja vijka kada vijak radi u režimu za koji je projektiran. Vrijednost početnog uvjeta specifične kinetičke energije turbulencije se za druge režime rada mijenja, no za okolinu točke gdje je maksimalan stupanj djelovanja vijka u slobodnoj vožnji vrijednost specifične kinetičke energije turbulencije ostaje približno ista.

Na kraju se može reći da je računalna dinamika fluida dovoljno napredovala da se mogu izvršavati simulacije kompleksnih strujanja tekućine kao što je strujanje tekućine oko brodskog vijka te očekivati rezultate simulacija unutar inženjerskih tolerancija pogreške, naravno uz primjenu dovoljno guste mreže kontrolnih volumena. Veća gustoća mreže zahtjeva veće računalne resurse međutim i s grubljom mrežom se može dobiti kvalitativni uvid u strujanje tekućine oko brodskog vijka.

## Literatura

- [1] Radan, D., Uvod u hidrodinamiku broda, Sveučilište u Dubrovniku, 2004.
- [2] Trejo, I., Terceño, M., Valle, J., Iranzo, A., and Domingo, J, Analysis of a ship propeller using cfd codes, in: International Conference on Computational Methods in Marine Engineering, MARINE, 2007.
- [3] Subhas, S., Saji, V.F., Ramakrishna, S., and Das, H.N., CFD analysis of a propeller flow and cavitation, International Journal of Computer Applications Vol. 55, No. 16, 2012.
- [4] Prakash, S. and Nath, D. R., A computational method for determination of open water performance of a marine propeller, International Journal of Computer Applications Vol. 58, No. 12, 2012.
- [5] Klasson, O.K., Huuva, T., Potsdam propeller test case (PPTC), Second International Symposium on Marine Propulsors, Germany, 2011.
- [6] Rhee, S.H., Joshi S., Computational Validation for Flow Around a Marine Propeller Using Unstructured Mesh Based Navier-Stokes solver, JSME International Journal Series B, Fluids and Thermal Engineering Vol. 48, No. 3, 2005., pp. 562-570.
- [7] Kulczyk, J., Skraburski, L., Zawislak, M., Analysis of screw propeller 4119 using the fluent system, archives of civil and mechanical engineering, 2007.
- [8] Mosaad, M.A. et. al., Guidelines for numerical flow simulation around marine propeller, First International Symposium on Naval Architecture and Maritime, Istanbul, 2011.
- [9] Tokyo 2015, A Workshop on CFD in Ship Hydrodynamics.  
URL <http://www.t2015.nmri.go.jp/>
- [10] Degiuli, N., Werner, A., Mehanika Fluida IB - podloge za nastavu,  
<http://www.fsb.hr/zbrodo/>.
- [11] Werner, A., Degiuli, N., Mehanika Fluida IIB - podloge za nastavu,  
<http://www.fsb.hr/zbrodo/>.
- [12] Ashgriz, N. and Mostaghimi, J, An introduction to computational fluid dynamics, Fluid flow handbook. McGraw-Hill Professional, 2002.
- [13] Vukčević, V., Primjena računalne dinamike fluida u analizi gibanja plovnih objekata, Diplomski rad, FSB, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2013.

- [14] Menter, F. R., Zonal Two equation  $k-\omega$  turbulence Models for Aerodynamic Flows, 24th Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida pp. 1-22.
- [15] OpenFOAMwiki, MRF development.  
URL [https://openfoamwiki.net/index.php/See\\_the\\_MRF\\_development](https://openfoamwiki.net/index.php/See_the_MRF_development)
- [16] Cvjetić, G., Steady state methods for turbomachinery, Seminarski rad, FSB, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2014.
- [17] Marić, T., Diskretizacija Navier - Stokes sustava metodom konačnih volumena, Seminarski rad, FSB, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.
- [18] Juretić, F., User Guide, [http://sourceforge.net/p/openfoam-extend/foam-extend-3.1/ci/b973a15b4d58741a9267b4393e4c01c886664c95/tree/doc/cfMesh/User % 20Guide% 20-% 20cfMesh](http://sourceforge.net/p/openfoam-extend/foam-extend-3.1/ci/b973a15b4d58741a9267b4393e4c01c886664c95/tree/doc/cfMesh/User%20Guide%20-%20cfMesh)
- [19] Turunen, T., Siikonen, T., Lundberg, J., Bensow, R., Open-Water Computations of a Marine Propeller Using OpenFOAM, Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCMXI), Barcelona, Spain, 2014, pp. 1123–1134.
- [20] CFD Online, Turbulence free stream boundary condition.  
URL [http://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence\\_free-stream\\_boundary\\_conditions](http://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_free-stream_boundary_conditions)